Über Ultrafilter und Nichtstandardmodelle mit vorgeschriebener Verteilung der Konstellationen

Inaugural-Dissertation
zur
Erlangung der Doktorwürde
des Fachbereichs Mathematik
der Freien Universität Berlin

vorgelegt von
Wolfgang Eck
aus Vlotho
1976

Über Ultrafilter und Nichtstandardmodelle mit vorgeschriebener Verteilung der Konstellationen

Inaugural-Dissertation
zur
Erlangung der Doktorwürde
des Fachbereichs Mathematik
der Freien Universität Berlin

vorgelegt von
Wolfgang Eck
aus Vlotho
1976

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

1. Referent: Prof. Dr. E.-J. Thiele

2. Referent: Prof. Dr. R. Fittler

Tag der mündlichen Prüfung: 21.10.1976

Tag der Promotion:

Druck: Zentrale Universitätsdruckerei, V a A 4

Inhaltsverzeichnis

Einleitung 1

Bezeichnungen 5

1. Konstellationen und Himmel 6

2. Unmittelbare Nachfolger von Ultrafiltern 22

3. Endliche Boolesche Algebren in der Rudin-Keisler Ordnung 39

Literaturverzeichnis 62

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41547205_0022

Einleitung

In [12] untersucht Ch. Puritz Nichtstandardmodelle $\mathfrak{A}$ der Arithmetik in bezug auf die Beschaffenheit ihrer Himmelmenge. Zugrundegelegt wird dabei eine genügend reichhaltige Sprache L erster Stufe, die (Symbole für) alle endlichstelligen Funktionen über ω sowie die natürliche Ordnung $<$ auf ω, der Menge aller natürlichen Zahlen, enthält.

Die Standardstruktur für L, deren Trägermenge ω ist, und in der die in L vorhandenen Funktionen und Relationen auf ω durch sich selbst interpretiert werden, wird mit $\mathfrak{N}$ bezeichnet. Echte elementare Erweiterungen von $\mathfrak{N}$ heißen Nichtstandardmodelle der (vollständigen) Arithmetik.

Ausgangspunkt der Untersuchungen von Puritz ist die folgende Frage: Gegeben seien ein Nichtstandardmodell $\mathfrak{A}$ der Arithmetik und ein Nichtstandardelement a von $\mathfrak{A}$ (d.h. $a \in \mathfrak{A} \setminus \mathfrak{N}$). Gibt es dann Elemente b aus $\mathfrak{A}$, die "unerreichbar größer" sind als a in dem Sinn, daß für alle Funktionen f von ω nach ω gilt: $f^{\mathfrak{A}}(a) <^{\mathfrak{A}} b$; dabei sind $f^{\mathfrak{A}}$ bzw. $<^{\mathfrak{A}}$ die Interpretationen von f bzw. $<$ in $\mathfrak{A}$. Puritz teilt $\mathfrak{A} \setminus \mathfrak{N}$ in Klassen ein, die er Himmel nennt: a und b liegen im gleichen Himmel, wenn es Funktionen $f,g: \omega \longrightarrow \omega$ gibt mit $a \leq^{\mathfrak{A}} f^{\mathfrak{A}}(b)$ und $b \leq^{\mathfrak{A}} g^{\mathfrak{A}}(a)$; a und b heißen verkettet, wenn es Funktionen $f,g: \omega \longrightarrow \omega$ gibt mit $a = f^{\mathfrak{A}}(b)$ und $b = g^{\mathfrak{A}}(a)$.

Ein Himmel heißt verkettet, wenn je zwei seiner Elemente verkettet sind. Die Menge con(a) der mit a verketteten Elemente heißt die Konstellation von a. Jeder Himmel setzt sich aus ganzen Konstellationen zusammen.

Durch $<^{\mathfrak{A}}$ wird die Menge der Himmel von $\mathfrak{A}$ in natürlicher Weise linear geordnet; in [12] untersucht Puritz Eigenschaften dieser geordneten Menge für verschiedene Arten von Nichtstandardmodellen. Er zeigt unter anderem, daß es zu jeder natürlichen Zahl $n \neq 0$ Modelle $\mathfrak{A}$ der Arithmetik gibt, für die $\mathfrak{A} \setminus \mathfrak{N}$ aus genau n Himmeln besteht, wobei die Verteilung der verketteten Himmel beliebig vorgeschrieben sein darf. Aus den Konstruktionen geht aber nicht hervor, in wie viele Konstellationen diejenigen Himmel zerfallen, die nicht verkettet sind.

In dieser Arbeit sollen Modelle $\mathfrak{A}$ konstruiert werden, die eine vorgeschriebene (endliche) Menge von Himmeln haben, welche in jeweils vorgegebene endliche Zahlen von Konstellationen zerfallen. Wir gehen dabei aus von der Menge $\mathrm{Con}(\mathfrak{A})$ der Konstellationen von $\mathfrak{A}$, die in kanonischer Weise halbgeordnet ist durch $\mathrm{con}(a) \sqsubseteq \mathrm{con}(b) :\mathrm{gdw}.\ a = f^{\mathfrak{A}}(b)$ für ein $f: \omega \longrightarrow \omega$. Die allgemeine Problemstellung lautet dann: Gibt es Modelle $\mathfrak{A}$ der Arithmetik, für die $(\mathrm{Con}(\mathfrak{A}), \sqsubseteq)$ isomorph ist zu einer vorgegebenen Halbordnung, und welche Verteilungen der Konstellationen auf die Himmel sind möglich? Für den Fall, daß die vorgegebene Halbordnung ein endlicher Verband ist, der durch Hintereinandersetzen von Booleschen Algebren entsteht, wird das Problem vollständig gelöst.

Es besteht ein enger Zusammenhang zwischen den Konstellationen von $\mathfrak{A}$ und den einfach, d.h. von einem einzigen Element, erzeugten Substrukturen von $\mathfrak{A}$: a und b erzeugen die gleiche Substruktur genau dann, wenn $\mathrm{con}(a) = \mathrm{con}(b)$, und

die von a erzeugte Substruktur ist genau dann in der von b erzeugten Substruktur enthalten, wenn $con(a) \subseteq con(b)$. Modelle mit einer größten Konstellation sind also einfach erzeugt und deshalb (bis auf Isomorphie) Ultrapotenzen der Standardstruktur $\mathfrak{N}$. Der hierdurch gegebene Zusammenhang mit Ultrafiltern auf ω legt es nahe zu untersuchen, ob für die Rudin-Keisler Ordnung der Ultrafilter auf ω, speziell der P-Punkte, analoge Ergebnisse gelten wie für die Modelle der Arithmetik.
Es sei noch erwähnt, daß sich H. Gaifman in [8] mit ähnlichen Fragestellungen für Modelle der Peano-Arithmetik beschäftigt (die zugrundeliegende Sprache L ist dort also abzählbar).

Kapitel 1 besteht aus allgemeinen Betrachtungen über die Menge der Konstellationen von Modellen $\mathfrak{A}$ der Arithmetik. Es wird gezeigt, welche Verteilungen der Konstellationen von $\mathfrak{A}$ auf die Himmel von $\mathfrak{A}$ höchstens möglich sind, falls $(Con(\mathfrak{A}), \subseteq)$ isomorph ist zu einem endlichen Verband, der durch Hintereinandersetzen von Booleschen Algebren entsteht.

In Kapitel 2 wird die durch

$$D \trianglelefteq E \quad :\text{gdw.} \quad D = f(E) \text{ für ein } f: \omega \longrightarrow \omega$$

definierte Rudin-Keisler Ordnung der Ultrafilter auf ω betrachtet. Unter Voraussetzung der Kontinuumhypothese wird bewiesen, daß jeder P-Punkt 2^c unmittelbare Nachfolger hat, die ebenfalls P-Punkte sind, und daß jeder freie Ultrafilter auf ω 2^c unmittelbare Nachfolger hat, die rare Ultrafilter sind. Das Ergebnis über P-Punkte stellt eine Verschärfung des

von A. Blass in [1] (allerdings mit einer schwächeren Voraussetzung, nämlich Martins Axiom) bewiesenen Satzes dar, daß jeder P-Punkt Nachfolger besitzt, die ebenfalls P-Punkte sind, sowie einer Verstärkung dieses Resultats durch K. Potthoff [11], der die Existenz von 2^c Nachfolger-P-Punkten zeigte.

Als Anwendung ergibt sich die folgende Verschärfung des anfangs genannten Resultats von Puritz:

Zu jedem $n \in \omega \setminus 1$ und jeder Folge $\langle i_k | k<n \rangle$ in $\omega \setminus 1$ gibt es 2^c paarweise nichtisomorphe Modelle $\mathfrak{A}$ der Arithmetik, für die $\mathfrak{A} \setminus \mathfrak{N}$ genau n Himmel hat, der k-te Himmel von $\mathfrak{A} \setminus \mathfrak{N}$ aus genau i_k Konstellationen besteht $(k<n)$ und $(\mathrm{Con}(\mathfrak{A} \setminus \mathfrak{N}), \subseteq)$ linear geordnet ist.

In Kapitel 3 wird, ebenfalls mit CH als Voraussetzung, gezeigt: Wenn V ein endlicher Verband ist, der durch Hintereinandersetzen von Booleschen Algebren entsteht, dann gilt:

1) Zu jeder nach Kapitel 1 möglichen Verteilung der Konstellationen auf die Himmel gibt es 2^c paarweise nichtisomorphe Modelle $\mathfrak{A}$ der Arithmetik mit dieser Verteilung und $(\mathrm{Con}(\mathfrak{A} \setminus \mathfrak{N}), \subseteq) \cong V$.
2) Zu jedem P-Punkt D gibt es 2^c P-Punkte $E \geq D$, für die das abgeschlossene Intervall $[D,E]$ zu V isomorph ist.

Herrn Prof. Dr. E.-J. Thiele danke ich herzlich für die Anregung und Unterstützung dieser Arbeit, sowie Herrn Dr. M. Ziegler für mehrere hilfreiche Gespräche.

Bezeichnungen

Die mengentheoretischen bzw. modelltheoretischen Bezeichnungen stimmen im wesentlichen überein mit den in [9] bzw. [3] benutzten. Einige zum Teil abweichende Notationen seien hier genannt.

Es sei $P(X)$ die Potenzmenge von X, ${}^{X}Y$ die Menge aller Funktionen $f:X \longrightarrow Y$. Für Funktionen f sei $Vb(f)$ der Vorbereich (Definitionsbereich) sowie $Nb(f)$ der Nachbereich (Wertebereich). $f\restriction A$ bezeichne die Einschränkung von f auf A. Wenn $f\restriction A$ die Eigenschaft E hat, wird auch gesagt, daß f auf A diese Eigenschaft hat. Auf $Vb(f)$ wird eine Äquivalenzrelation π definiert durch $x \pi y$:gdw. $f(x) = f(y)$; die Äquivalenzklassen werden Fasern bzgl. f genannt.

f heißt endlich, wenn alle Fasern bzgl. f endlich sind.

Ordinalzahlen seien so definiert, daß jede Ordinalzahl gleich der Menge aller kleineren Ordinalzahlen ist. Kardinalzahlen sind Ordinalzahlen, die zu keiner kleineren Ordinalzahl gleichmächtig sind. Die kleinste unendliche Kardinalzahl ist ω, die Menge der natürlichen Zahlen; das kleinste Element von ω ist 0, die leere Menge. Die erste überabzählbare Kardinalzahl wird mit ω_1 bezeichnet.

$|X|$ sei die Kardinalzahl der Menge X. Die Kardinalzahl von $P(\omega)$ wird mit c bezeichnet. Für Kardinalzahlen α, β sei α^{β} die Kardinalzahl von ${}^{\beta}\alpha$.

Sei $(X, \leq)$ halbgeordnet, $x,y \in X$; $[x,y] := \{z \in X \mid x \leq z \leq y\}$.

Für $n \in \omega \setminus 1$ sei ferner $[X]^n := \{(x_0, \ldots, x_{n-1}) \mid x_i \in X,\ x_0 < \ldots < x_{n-1}\}$ die Menge der echt aufsteigenden n-Tupel in X; $[X]^0 := \{0\}$.

1. Konstellationen und Himmel

Es sei L die folgende Sprache erster Stufe (mit Identität): Funktionssymbole sind sämtliche endlichstelligen Funktionen f über ω, Relationssymbole alle endlichstelligen Relationen R auf ω. Die Interpretation von f bzw. R in der L-Struktur $\mathfrak{A}$ sei $f^{\mathfrak{A}}$ bzw. $R^{\mathfrak{A}}$. In der Notation wird meist kein Unterschied zwischen Strukturen und ihren Trägermengen gemacht. Die Standardstruktur $\mathfrak{N}$ für L hat ω als Trägermenge, und die Funktions- bzw. Relationssymbole werden durch sich selbst interpretiert, d.h. $f^{\mathfrak{N}} = f$ und $R^{\mathfrak{N}} = R$.

Th($\mathfrak{N}$), die Menge aller in $\mathfrak{N}$ gültigen L-Aussagen, hat eingebaute Skolemfunktionen. Daher gilt für alle Modelle $\mathfrak{A}$ von Th($\mathfrak{N}$): ist $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{A}$, so $\mathfrak{B} \prec \mathfrak{A}$ (jede Substruktur $\mathfrak{B}$ von $\mathfrak{A}$ ist bereits elementare Substruktur von $\mathfrak{A}$). Th($\mathfrak{N}$) ist also modellvollständig. Bezogen auf Modelle von Th($\mathfrak{N}$) sind daher die Begriffe "isomorphe Einbettung" und "elementare Einbettung" gleichbedeutend.

Die Standardstruktur $\mathfrak{N}$ ist in jedes Modell $\mathfrak{A}$ von Th($\mathfrak{N}$) elementar einbettbar ($\mathfrak{N}$ ist Primmodell von Th($\mathfrak{N}$)) und wird oBdA. als Substruktur von $\mathfrak{A}$ aufgefaßt. Echte elementare Erweiterungen $\mathfrak{A}$ von $\mathfrak{N}$, d.h. Modelle $\mathfrak{A}$ von Th($\mathfrak{N}$), die nicht zu $\mathfrak{N}$ isomorph sind, heißen Nichtstandardmodelle der (vollständigen) Arithmetik; alle Elemente aus $\mathfrak{A} \setminus \mathfrak{N}$ heißen Nichtstandardelemente von $\mathfrak{A}$.

Von nun an sei $\mathfrak{A}$ stets Modell von Th($\mathfrak{N}$).

Sei $a \in \mathfrak{A}$. Mit $\mathfrak{A}$ ist auch die von a erzeugte Substruktur $\langle a \rangle$ Modell von Th($\mathfrak{N}$), und es gilt (vgl. Blass [2]):

$$\langle a \rangle = \{ f^{\mathfrak{A}}(a) \mid f \in {}^{\omega}\omega \} .$$

Solche von einem einzigen Element erzeugten Substrukturen werden einfach erzeugt genannt. Die einfach erzeugten Modelle von Th($\mathfrak{N}$) sind (bis auf Isomorphie) genau die Ultrapotenzen $\mathfrak{N}^{\omega}/D$ (D Ultrafilter auf ω): Es ist leicht zu sehen, daß id_{ω}/D erzeugendes Element von $\mathfrak{N}^{\omega}/D$ ist. Wenn umgekehrt $\mathfrak{A}$ Modell von Th($\mathfrak{N}$) ist, so wird für jedes $a \in \mathfrak{A}$ durch

$$U_a := \{ S \subseteq \omega \mid \mathfrak{A} \models S[a] \}$$

ein Ultrafilter auf ω definiert, und es ist $\langle a \rangle \cong \mathfrak{N}^{\omega}/U_a$ vermöge $f^{\mathfrak{A}}(a) \longmapsto f/U_a$ (vgl. [1], [12]). Insbesondere gilt $f^{\mathfrak{A}}(a) = g^{\mathfrak{A}}(a)$ gdw. Es gibt ein $S \in U_a$ mit $f \restriction S = g \restriction S$. U_a ist fixiert (Hauptultrafilter), wenn a aus $\mathfrak{N}$, und frei (nicht fixiert), wenn a aus $\mathfrak{A} \setminus \mathfrak{N}$ ist.

Es sollen nun Modelle von Th($\mathfrak{N}$) im Zusammenhang mit den von Puritz ([12]) definierten Himmeln und Konstellationen betrachtet werden.

Zunächst wird auf $\mathfrak{A}$ eine Relation $\trianglelefteq$ definiert durch

$$a \trianglelefteq b \quad :\text{gdw. Es gibt ein } f \in {}^{\omega}\omega \text{ mit } a = f^{\mathfrak{A}}(b).$$

In $\mathfrak{N}$ und somit in $\mathfrak{A}$ gelten die Aussagen
$\forall x(x = id_{\omega}(x))$ und $\forall x(g \circ f(x) = g(f(x)))$; daraus folgt $a = (id_{\omega})^{\mathfrak{A}}(a)$ für alle $a \in \mathfrak{A}$, und aus $a = g^{\mathfrak{A}}(b)$, $b = f^{\mathfrak{A}}(c)$ ergibt sich $a = g^{\mathfrak{A}}(f^{\mathfrak{A}}(c)) = (g \circ f)^{\mathfrak{A}}(c)$.
Die Relation $\trianglelefteq$ ist also reflexiv und transitiv, d.h. eine Quasiordnung.

Die zugehörige Äquivalenzrelation sei $\leftrightarrow$, d.h.
$a \leftrightarrow b$:gdw. Es gibt $f,g \in {}^{\omega}\omega$ mit $a = f^{\mathfrak{A}}(b)$ und $b = g^{\mathfrak{A}}(a)$.

Aus der oben angegebenen Darstellung einfach erzeugter Substrukturen folgt unmittelbar:
$a \sqsubseteq b$ gdw. $\langle a \rangle \subseteq \langle b \rangle$, $a \leftrightarrow b$ gdw. $\langle a \rangle = \langle b \rangle$.

$con(a) := \{b \in \mathfrak{A} \mid a \leftrightarrow b\}$ heißt die Konstellation von a.
Für $B \subseteq \mathfrak{A}$ sei $Con(B) := \{con(b) \mid b \in B\}$.
Auf $Con(\mathfrak{A})$ wird von $\sqsubseteq$ eine (ebenfalls mit $\sqsubseteq$ bezeichnete) Halbordnung induziert durch $con(a) \sqsubseteq con(b)$:gdw. $a \sqsubseteq b$.

Eine lineare Quasiordnung auf $\mathfrak{A}$ ist $\trianglelefteq$, definiert durch

$a \trianglelefteq b$:gdw. Es gibt ein $f \in {}^{\omega}\omega$ mit $a \leq^{\mathfrak{A}} f^{\mathfrak{A}}(b)$.

Die Linearität von $\trianglelefteq$ folgt unmittelbar daraus, daß $\trianglelefteq$ die lineare Ordnung $\leq^{\mathfrak{A}}$ umfaßt. Die Transitivität läßt sich etwa so zeigen: ist $a \leq^{\mathfrak{A}} f^{\mathfrak{A}}(b)$ und $b \leq^{\mathfrak{A}} g^{\mathfrak{A}}(c)$, so wähle ein monoton wachsendes $h \geq f$, z.B. $h(n) := \max\{f(m) \mid m \leq n\}$. In $\mathfrak{N}$ und $\mathfrak{A}$ gilt dann $\forall x \forall y (x \leq y \longrightarrow f(x) \leq h(y))$; aus $b \leq^{\mathfrak{A}} g^{\mathfrak{A}}(c)$ folgt $f^{\mathfrak{A}}(b) \leq^{\mathfrak{A}} h^{\mathfrak{A}}(g^{\mathfrak{A}}(c))$ und daraus $a \leq^{\mathfrak{A}} (h \circ g)^{\mathfrak{A}}(c)$.
Die zu $\trianglelefteq$ gehörende Äquivalenzrelation wird mit $\sim$ bezeichnet;

$a \sim b$:gdw. Es gibt $f,g \in {}^{\omega}\omega$ mit $a \leq^{\mathfrak{A}} f^{\mathfrak{A}}(b)$ und $b \leq^{\mathfrak{A}} g^{\mathfrak{A}}(a)$.

$sk(a) := \{b \in \mathfrak{A} \mid b \sim a\}$ wird der Himmel von a genannt.
Für $B \subseteq \mathfrak{A}$ sei $Sk(B) := \{sk(b) \mid b \in B\}$. $Sk(\mathfrak{A})$ ist dann linear geordnet durch $sk(a) \trianglelefteq sk(b)$:gdw. $a \trianglelefteq b$.
Für die zugehörige irreflexive Ordnung $\triangleleft$ gilt:
$sk(a) \triangleleft sk(b)$ gdw. $x <^{\mathfrak{A}} y$ für alle $x \sim a$, $y \sim b$.

Die Äquivalenzrelation $\sim$ ist gröber als $\leftrightarrow$. Jeder Himmel setzt sich daher aus ganzen Konstellationen zusammen; diejenigen Himmel, die aus einer einzigen Konstellation bestehen, werden "verkettet" genannt; es ist also sk(a) verkettet genau dann, wenn sk(a) = con(a).

Puritz untersucht für verschiedene Arten von Modellen $\mathfrak{A}$ der Arithmetik (Ultrapotenzen von $\mathfrak{N}$, Enlargements, saturierte Modelle) die Beschaffenheit von $SK(\mathfrak{A}) := (Sk(\mathfrak{A} \setminus \mathfrak{N}), \lhd)$.
Im Fall der Ultrapotenzen bestehen Zusammenhänge zwischen Eigenschaften der Himmelmenge und der beteiligten Ultrafilter. Für P-Punkte, minimale und rare Ultrafilter seien die entsprechenden Ergebnisse aus [12] hier genannt.
Wir gehen dabei aus von den folgenden Definitionen:
Sei D freier Ultrafilter auf ω.

D P-Punkt :gdw. Zu jedem $f \in {}^{\omega}\omega$ gibt es ein $A \in D$, so daß $f \restriction A$ konstant oder endlich ist.

(Dabei heißt f endlich, wenn alle Fasern bzgl. f endlich sind, d.h. wenn $f^{-1}(x)$ endlich ist für alle $x \in Nb(f)$.)

D minimal :gdw. Zu jedem $f \in {}^{\omega}\omega$ gibt es ein $A \in D$, so daß $f \restriction A$ konstant oder injektiv ist.

D rar :gdw. Zu jedem endlichen $f \in {}^{\omega}\omega$ gibt es ein $A \in D$, so daß $f \restriction A$ injektiv ist.

Es gilt dann (siehe Puritz [12]):

1.1 Satz: Sei D freier Ultrafilter auf ω, $\mathfrak{A} := \mathfrak{N}^{\omega}/D$.

(1) D P-Punkt gdw. $\mathfrak{A} \setminus \mathfrak{N}$ besteht aus genau einem Himmel.

(2) D minimal gdw. $\mathfrak{A} \setminus \mathfrak{N}$ besteht aus einer einzigen Konstellation.

(3) D rar gdw. Der höchste Himmel von $\mathfrak{A}$ ist verkettet.

Mit den in [12] entwickelten Methoden kann Puritz zeigen, daß es zu jeder natürlichen Zahl $n \neq 0$ Modelle $\mathfrak{A}$ von $Th(\mathfrak{N})$ gibt, für die $\mathfrak{A} \setminus \mathfrak{N}$ aus genau n Himmeln besteht, wobei noch die Verteilung der verketteten Himmel beliebig vorgeschrieben sein darf. Aus den Konstruktionen geht aber nicht hervor, in wie viele Konstellationen diejenigen Himmel zerfallen, die nicht verkettet sind. In dieser Arbeit werden Verfahren zur Konstruktion von Ultrafiltern angegeben, die es gestatten, Modelle mit einer vorgeschriebenen (endlichen) Menge von Himmeln zu konstruieren, die in jeweils vorgegebene endliche Zahlen von Konstellationen zerfallen (vgl. etwa Kapitel 2).

Erste Information über die Halbordnung $(Con(\mathfrak{A}), \subseteq)$ liefern die folgenden Lemmata.

1.2 Lemma: Jede endlich erzeugte Substruktur $\mathfrak{A}'$ von $\mathfrak{A}$ ist einfach erzeugt.

Bew.: Es genügt zu zeigen, daß jede von zwei Elementen erzeugte Substruktur einfach erzeugt ist. Sei also $\mathfrak{A}'$ von a_1 und a_2 erzeugt. $f: \omega \times \omega \longrightarrow \omega$ sei bijektiv, $p_k: \omega \times \omega \longrightarrow \omega$ sei die k-te Projektion, d.h. $p_k(x_1, x_2) = x_k$ für $k = 1,2$. Setze $a := f^{\mathfrak{A}}(a_1, a_2)$. Dann ist $\langle a \rangle \subseteq \mathfrak{A}'$, und aus $a_k = (p_k \circ f^{-1})^{\mathfrak{A}}(a)$ folgt $\langle a \rangle = \mathfrak{A}'$. □

1.3 Lemma: Seien $a,b,c \in \mathfrak{A}$. Dann gilt:

(1) $\langle a \rangle = \langle b,c \rangle$ gdw. $con(a) = \sup\{con(b), con(c)\}$.

(2) $\langle a \rangle = \langle b \rangle \cap \langle c \rangle$ gdw. $con(a) = \inf\{con(b), con(c)\}$.

Bew.: Aus $\langle a \rangle = \langle b,c \rangle$ folgt $\langle b \rangle \subseteq \langle a \rangle$ und $\langle c \rangle \subseteq \langle a \rangle$, also

gilt $\mathrm{con}(b) \subseteq \mathrm{con}(a)$ und $\mathrm{con}(c) \subseteq \mathrm{con}(a)$. Ist $\mathrm{con}(d) \supseteq \mathrm{con}(b)$, $\mathrm{con}(d) \supseteq \mathrm{con}(c)$, so $\langle d\rangle \supseteq \langle b\rangle, \langle c\rangle$; also $\langle d\rangle \supseteq \langle b,c\rangle = \langle a\rangle$, d.h. $\mathrm{con}(d) \supseteq \mathrm{con}(a)$.

Umgekehrt folgt aus $\mathrm{con}(a) = \sup\{\mathrm{con}(b), \mathrm{con}(c)\}$, daß $\langle b,c\rangle \subseteq \langle a\rangle$. Nach 1.2 gibt es ein $d \in \mathfrak{A}$ mit $\langle b,c\rangle = \langle d\rangle$; es gilt dann $\mathrm{con}(d) \supseteq \mathrm{con}(b), \mathrm{con}(c)$, also $\mathrm{con}(d) \supseteq \mathrm{con}(a)$ und daher $\langle a\rangle \subseteq \langle d\rangle = \langle b,c\rangle$.

Damit ist (1) bewiesen, und (2) beweist man analog. □

Aus Lemma 1.2 folgt, daß für Modelle von $\mathrm{Th}(\mathfrak{A})$ die Begriffe "einfach erzeugt" und "endlich erzeugt" zusammenfallen. Daraus und aus Lemma 1.3,(1) ergibt sich, daß zu je zwei Elementen aus $\mathrm{Con}(\mathfrak{A})$ das Supremum existiert, daß also $(\mathrm{Con}(\mathfrak{A}), \subseteq)$ ein oberer Halbverband ist. Ist der Durchschnitt von je zwei endlich erzeugten Substrukturen wieder endlich erzeugt, so existiert zu je zwei Elementen aus $\mathrm{Con}(\mathfrak{A})$ das Infimum, und umgekehrt (Lemma 1.3,(2)). Wir haben also das folgende Lemma:

1.4 Lemma:

(1) $(\mathrm{Con}(\mathfrak{A}), \subseteq)$ ist oberer Halbverband.

(2) $(\mathrm{Con}(\mathfrak{A}), \subseteq)$ ist Verband genau dann, wenn der Durchschnitt von je zwei endlich erzeugten Substrukturen von $\mathfrak{A}$ endlich erzeugt ist.

(3) Ist $\mathrm{Con}(\mathfrak{A})$ endlich, so ist $(\mathrm{Con}(\mathfrak{A}), \subseteq)$ ein Verband.

(4) $(\mathrm{Con}(\mathfrak{A}), \subseteq)$ hat ein größtes Element genau dann, wenn $\mathfrak{A}$ einfach erzeugt ist.

Bew.: (1) und (2) folgen aus den obigen Vorbemerkungen.

(3) Wenn $Con(\mathfrak{A})$ endlich ist, muß jede Substruktur von $\mathfrak{A}$ endlich erzeugt sein; sonst gäbe es nämlich unendlich viele einfach erzeugte Substrukturen von $\mathfrak{A}$, und damit unendlich viele Konstellationen.

(4) folgt daraus, daß $\mathfrak{A} = \langle a \rangle$ gdw. $con(a)$ größtes Element von $(Con(\mathfrak{A}), \subseteq)$. □

Wir wenden uns nun der Frage zu, in wie weit sich die Himmel von $\mathfrak{A}$ mit Hilfe der Konstellationen charakterisieren lassen. Es wird sich zeigen, daß die Verteilung der Konstellationen auf die Himmel sowie die Ordnung der Himmel vollständig bekannt ist, wenn man weiß, wie die Halbordnung der Konstellationen aussieht und welche Elemente von $\mathfrak{A}$ durch endliche Funktionen von der Form $f^{\mathfrak{A}}$ $(f \in {}^{\omega}\omega)$ ineinander überführt werden (siehe Lemma 1.13).

Das nächste Lemma folgt unmittelbar aus den Definitionen.

1.5 Lemma: Seien $a, b \in \mathfrak{A}$, $f \in {}^{\omega}\omega$. Dann gilt:

(1) $a \leq^{\mathfrak{A}} b \implies sk(a) \trianglelefteq sk(b)$,

(2) $sk(f^{\mathfrak{A}}(a)) \trianglelefteq sk(a)$.

1.6 Lemma: Seien $a, b, c \in \mathfrak{A}$. Dann gilt:

(1) $\langle a \rangle = \langle b, c \rangle \implies sk(a) = \max\{sk(b), sk(c)\}$,

(2) $con(a) = \sup\{con(b), con(c)\} \implies sk(a) = \max\{sk(b), sk(c)\}$.

Bew.: (1) Sei $\langle a \rangle = \langle b, c \rangle$. Aus 1.5,(2) folgt dann $sk(b) \trianglelefteq sk(a)$ und $sk(c) \trianglelefteq sk(a)$. Wegen $a \in \langle b, c \rangle$ gibt es ein $f: \omega \times \omega \to \omega$ mit $a = f^{\mathfrak{A}}(b, c)$. Definiere $g: \omega \to \omega$ durch $g(n) := \max\{f(i,k) \mid i, k \in \omega;\ i, k \leq n\}$. In $\mathfrak{N}$ und somit auch

in $\mathfrak{A}$ gilt $\forall x\forall y\forall z(y \leq x \wedge z \leq x \longrightarrow f(y,z) \leq g(x))$.
Für $d := \max\{b,c\}$ gilt daher $f^{\mathfrak{A}}(b,c) \leq^{\mathfrak{A}} g^{\mathfrak{A}}(d)$. Aus 1.5 folgt:
$sk(a) = sk(f^{\mathfrak{A}}(b,c)) \trianglelefteq sk(g^{\mathfrak{A}}(d)) \trianglelefteq sk(d)$; wegen $d = b$ oder
$d = c$ ergibt sich $sk(a) \trianglelefteq \max\{sk(b),sk(c)\}$.
(2) ist wegen 1.3,(1) lediglich eine Umformulierung von (1).□

1.7 Lemma: (Blass [2], Puritz [12],[13])

Sei $a \in \mathfrak{A}$, $f \in {}^{\omega}\omega$. Äquivalent sind:

(1) $f^{\mathfrak{A}}(a) \sim a$.

(2) Es gibt ein $S \in U_a$, so daß $f\restriction S$ endlich ist.

(3) Es gibt ein endliches $g \in {}^{\omega}\omega$ mit $g^{\mathfrak{A}}(a) = f^{\mathfrak{A}}(a)$.

Bew.:

"(1) $\Rightarrow$(2)" Ist $f^{\mathfrak{A}}(a) \sim a$, so gibt es ein $g \in {}^{\omega}\omega$ mit $a \leq^{\mathfrak{A}} g^{\mathfrak{A}}(f^{\mathfrak{A}}(a))$. Auf $S := \{n \in \omega \mid n \leq g(f(n))\}$ ist f endlich, und aus der Gültigkeit von $\forall x(S(x) \leftrightarrow x \leq g(f(x))$ folgt $S \in U_a$.

"(2) $\Rightarrow$(3)" Sei $S \in U_a$, $f\restriction S$ endlich. Wähle ein endliches $g \in {}^{\omega}\omega$ mit $f\restriction S = g\restriction S$. Aus $S \in U_a$ folgt $g^{\mathfrak{A}}(a) = f^{\mathfrak{A}}(a)$.

"(3) $\Rightarrow$(1)" Sei $g \in {}^{\omega}\omega$ endlich mit $g^{\mathfrak{A}}(a) = f^{\mathfrak{A}}(a)$. Dann gilt für $h(n) := \max\{i \in \omega \mid g(i) \leq n\}$, daß $h(g(i)) \geq i$ für alle $i \in \omega$, also $a \leq^{\mathfrak{A}} h^{\mathfrak{A}}(g^{\mathfrak{A}}(a)) = h^{\mathfrak{A}}(f^{\mathfrak{A}}(a))$; daher $a \sim f^{\mathfrak{A}}(a)$. □

1.8 Lemma: (Blass [2], Puritz [12])

Seien $a,b \in \mathfrak{A}$. Es gilt:

$a \sim b$ gdw. Es gibt endliche $f,g \in {}^{\omega}\omega$ mit $f^{\mathfrak{A}}(a) = g^{\mathfrak{A}}(b)$.

Bew.:

"$\Longrightarrow$" Sei $a \sim b$, oBdA. $a \leq^{\mathfrak{A}} b$. Es gibt ein $h \in {}^{\omega}\omega$ mit $b \leq^{\mathfrak{A}} h^{\mathfrak{A}}(a)$.
Sei $F_0 := \{0\}$ und F_{i+1} das von $(i+2) \cup h[F_i]$ erzeugte

Anfangsstück von ω. Die durch $f(n) := \min\{i \in \omega \mid n \in F_i\}$ $(n \in \omega)$ definierte Funktion f ist endlich, weil für alle $i \in \omega$ $f^{-1}(i) \subseteq F_i$ und F_i endlich ist. Aus der Gültigkeit von $\forall x \forall y (x \leq y \leq h(x) \longrightarrow f(x) \leq f(y) \leq f(x)+1)$ folgt wegen $a \leq^{\mathfrak{A}} b$ und $b \leq^{\mathfrak{A}} h^{\mathfrak{A}}(a)$, daß $f^{\mathfrak{A}}(b) = f^{\mathfrak{A}}(a)$ oder $f^{\mathfrak{A}}(b) = f^{\mathfrak{A}}(a)+1 = (f+1)^{\mathfrak{A}}(a)$. Weil f und f+1 endlich sind, folgt die Beh. .

"$\Longleftarrow$" Folgt aus 1.7. □

Analoge Charakterisierungen gelten für $\leftrightarrow$ (siehe [4], [13]):

1.9 Lemma: Sei $a \in \mathfrak{A}$, $f \in {}^{\omega}\omega$. Äquivalent sind:

(1) $f^{\mathfrak{A}}(a) \leftrightarrow a$.

(2) Es gibt ein $S \in U_a$, so daß $f \restriction S$ injektiv ist.

(3) Es gibt ein injektives $g \in {}^{\omega}\omega$ mit $g^{\mathfrak{A}}(a) = f^{\mathfrak{A}}(a)$.

1.10 Lemma: Seien $a, b \in \mathfrak{A}$. Äquivalent sind:

(1) $a \leftrightarrow b$.

(2) Es gibt ein bijektives $f \in {}^{\omega}\omega$ mit $f^{\mathfrak{A}}(a) = b$.

(3) Es gibt $f \in {}^{\omega}\omega$, $S \in U_a$ mit: $f \restriction S$ injektiv und $f^{\mathfrak{A}}(a) = b$.

Der Beweis von 1.9 ist ähnlich wie der von 1.7, und 1.10 folgt leicht aus 1.9.

Wir definieren nun eine weitere Relation $\trianglelefteq_e$ auf $\mathfrak{A}$ durch

$a \trianglelefteq_e b$:gdw. Es gibt ein endliches $f \in {}^{\omega}\omega$ mit $a = f^{\mathfrak{A}}(b)$.

$\trianglelefteq_e$ ist eine Quasiordnung; die Transitivität von $\trianglelefteq_e$ folgt aus dem nächsten Lemma, Teil 2).

1.11 Lemma: Seien X,Y,Z Mengen, $A \subseteq X$, $B \subseteq Y$, $f \in {}^{X}Y$, $g \in {}^{Y}Z$. Dann gilt:

1) Ist $g \circ f$ endlich auf A, so ist f endlich auf A und g endlich auf $f[A]$.

2) Ist f endlich auf A und g endlich auf B, so ist $g \circ f$ endlich auf $A \cap f^{-1}[B]$.

Bew.: 1) folgt aus $f^{-1}(y) \subseteq (g \circ f)^{-1}(g(y))$ für alle $y \in Y$ sowie aus $f[A] \cap g^{-1}(z) \subseteq f[A \cap (g \circ f)^{-1}(z)]$ für alle $z \in Z$.

2) folgt daraus, daß für alle $z \in Z$ gilt:
$(g \circ f)^{-1}(z) \cap A \cap f^{-1}[B] \subseteq \bigcup \{f^{-1}(y) \cap A \mid y \in g^{-1}(z) \cap B\}$. □

Mit Hilfe von 1.10 sieht man leicht, daß $\leftrightarrow$ die zu $\sqsubseteq_e$ gehörende Äquivalenzrelation ist. Die auf $\mathrm{Con}(\mathfrak{A})$ induzierte Halbordnung wird ebenfalls mit $\sqsubseteq_e$ bezeichnet.

1.12 Lemma: Seien $a,b,c \in \mathfrak{A}$. Dann gilt:

1) $a \sqsubseteq_e b$ gdw. $a \subseteq b$ und $a \sim b$.
(d.h. $\sqsubseteq_e$ ist der Durchschnitt von $\subseteq$ und $\sim$).

2) $a \subseteq b \subseteq c$ und $a \sqsubseteq_e c \implies a \sqsubseteq_e b \sqsubseteq_e c$.

Bew.: 1) folgt aus 1.7.

2) Sei $a = f^{\mathfrak{A}}(b)$, $b = g^{\mathfrak{A}}(c)$. Aus $a = (f \circ g)^{\mathfrak{A}}(c)$ und $a \sqsubseteq_e c$ folgt nach 1.7, daß $f \circ g$ auf einem $S \in U_c$ endlich ist.
Nach 1.11,1) ist g endlich auf S, also $b = g^{\mathfrak{A}}(c) \sim c$ nach 1.7.
Also gilt $a \sim c \sim b$, so daß die Beh. aus 1) folgt. □

Das nächste Lemma zeigt, daß $\sim$ und $\trianglelefteq$ vollständig durch $\subseteq$ und $\sqsubseteq_e$ bestimmt sind.

1.13 Lemma: Seien $a,b \in \mathfrak{A}$. Dann gilt:

(1) $a \sim b$ gdw. Es gibt ein $c \in \mathfrak{A}$ mit $a \sqsubseteq_e c$ und $b \sqsubseteq_e c$.

(2) $a \sim b$ gdw. Es gibt ein $c \in \mathfrak{A}$ mit $c \sqsubseteq_e a$ und $c \sqsubseteq_e b$.

(3) $a \trianglelefteq b$ gdw. Es gibt ein $c \in \mathfrak{A}$ mit $b \sim c$ und $a \sqsubseteq c$.

Bew.: (1) "$\Longrightarrow$" Sei $a \sim b$ und $c \in \mathfrak{A}$ so, daß $\langle a,b \rangle = \langle c \rangle$. Aus 1.6 folgt $a \sim c$ oder $b \sim c$. Also $a,b \sqsubseteq c$ und $a \sim b \sim c$, woraus $a,b \sqsubseteq_e c$ folgt.

"$\Longleftarrow$" Aus $a,b \sqsubseteq_e c$ folgt $a \sim c \sim b$.

(2) ergibt sich unmittelbar aus 1.5.

(3) "$\Longrightarrow$" Sei $\langle a,b \rangle = \langle c \rangle$. Dann ist $a \sqsubseteq c$, und $b \sim c$ folgt aus 1.6 wegen $a \trianglelefteq b$.

"$\Longleftarrow$" Ist $a \sqsubseteq c$, so $a \trianglelefteq c$; wegen $b \sim c$ also $a \trianglelefteq b$. □

Für den Fall, daß $(\mathrm{Con}(\mathfrak{A}), \sqsubseteq)$ isomorph ist zu einer endlichen Booleschen Algebra (oder allgemeiner zu einem endlichen Verband, der durch Hintereinandersetzen von endlichen Booleschen Algebren entsteht) lassen sich die möglichen Verteilungen der Konstellationen von $\mathfrak{A}$ auf die Himmel von $\mathfrak{A}$ explizit angeben. Der Vorbereitung dient das folgende Lemma:

1.14 Lemma: Seien $x,y \in \mathrm{Con}(\mathfrak{A})$, $y \sqsubseteq x$, $[y,x]$ endlich. Dann gibt es ein kleinstes $z \in [y,x]$ mit $z \sqsubseteq_e x$.

Bew.: $x \sqsubseteq_e x$ ist klar. Weil $[y,x]$ endlich ist, existiert ein minimales $z \in [y,x]$ mit $z \sqsubseteq_e x$. z hat die gewünschte Eigenschaft: sei $w \in [y,x]$, $w \sqsubseteq_e x$; zu zeigen: $z \sqsubseteq w$.
Da $[y,x]$ endlich ist, existiert $v := \inf\{w,z\} \in [y,x]$.
Aus $w,z \sqsubseteq_e x$ folgt mit 1.13, (1) und (2), daß es ein $u \in \mathrm{Con}(\mathfrak{A})$

gibt mit $u \sqsubseteq_e w$ und $u \sqsubseteq_e z$. Weil v das Infimum von w und z ist, folgt $u \sqsubseteq v \sqsubseteq z$. Aus $u \sqsubseteq_e z$ erhält man mit 1.12,2), daß $v \sqsubseteq_e z$ und daher $v \sqsubseteq_e x$; aus $v \sqsubseteq z$ und der Minimalität von z folgt $v = z$ und damit $z \sqsubseteq w$. □

1.15 Def.: Sei $\mathfrak{A}$ von a erzeugt und $\varphi: \mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{B}$ isomorphe Einbettung.
Dann heißt $(\mathfrak{B}, \varphi)$ Erweiterung von $\mathfrak{A}$; ferner sei
$C(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \varphi) := \mathrm{Con}(\mathfrak{B} \setminus \varphi[\mathfrak{A}]) \cup \{\mathrm{con}(\varphi(a))\}$.

Bem.: Ist $\varphi: \mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{B}$ isomorphe Einbettung, so gilt $\mathrm{Con}(\mathfrak{A}) \cong \mathrm{Con}(\varphi[\mathfrak{A}])$ und $\mathrm{Sk}(\mathfrak{A}) \cong \mathrm{Sk}(\varphi[\mathfrak{A}])$ (auf natürliche Weise), und $\mathrm{Con}(\varphi[\mathfrak{A}])$ ist Anfangsstück von $\mathrm{Con}(\mathfrak{B})$.

1.16 Def.: Seien $k, m \in \omega$, $k \leq m$; $x, y \in P(m)$.
$(x,y) \in R_k^m$:gdw. $x \subseteq y$ und $(y \subseteq k$ oder $(y \neq 0$ und $\max(y) \in x))$.

1.17 Satz: Sei $\mathfrak{A}$ von a erzeugt, $(\mathfrak{B}, \varphi)$ Erweiterung von $\mathfrak{A}$, $m \in \omega$, $(C(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \varphi), \sqsubseteq) \cong (P(m), \subseteq)$.
Dann gibt es ein $k \leq m$, so daß
$(C(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \varphi), \sqsubseteq, \sqsubseteq_e) \cong (P(m), \subseteq, R_k^m)$.

Bem.: Ist also $(C(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \varphi), \sqsubseteq) \cong (P(m), \subseteq)$, so folgt aus dem Satz und Lemma 1.13, daß die Verteilung der Konstellationen aus $C(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \varphi)$ auf die Himmel von $\mathfrak{B}$ festgelegt ist durch eine der m+1 Relationen R_k^m $(k \leq m)$.

Beweis des Satzes:

Für $m = 0$ ist $C(\mathfrak{A},\mathfrak{B},\varphi) = \{con(\varphi(a))\}$; wegen $R_0^0 = \{(0,0)\}$ gilt also trivialerweise $(C(\mathfrak{A},\mathfrak{B},\varphi), \sqsubseteq, \sqsubseteq_e) \cong (P(0), \subseteq, R_0^0)$.

Sei für $m \geq 0$ die Behauptung bereits bewiesen, und gelte $(C(\mathfrak{A},\mathfrak{B},\varphi), \sqsubset) \cong (P(m+1), \subset)$.

Dann hat $C(\mathfrak{A},\mathfrak{B},\varphi)$ ein größtes Element v; kleinstes Element von $C(\mathfrak{A},\mathfrak{B},\varphi)$ ist $u := con(\varphi(a))$, also $C(\mathfrak{A},\mathfrak{B},\varphi) = [u,v]$.

Sei z kleinstes Element aus $[u,v]$ mit $z \sqsubseteq_e v$ (Existenz: 1.14).

1.Fall: $z = u$.

Sind $x,y \in [u,v]$, so folgt aus $x \sqsubset y$ und $u \sqsubset_e x$, daß $x \sqsubseteq_e y$.

Also stimmt $\sqsubset$ mit $\sqsubseteq_e$ überein; ebenso $\subset$ mit R_{m+1}^{m+1}, und deshalb $(C(\mathfrak{A},\mathfrak{B},\varphi), \sqsubset, \sqsubseteq_e) \cong (P(m+1), \subset, R_{m+1}^{m+1})$ (durch den vorgegebenen Isomorphismus).

2.Fall: $z \neq u$.

Dann ist z Atom, denn sonst hätte z zwei echte unmittelbare Vorgänger x und y; es wäre dann $z = \sup\{x,y\}$, nach 1.6 also $x \sqsubseteq_e z$ oder $y \sqsubseteq_e z$ und damit $x \sqsubseteq_e v$ oder $y \sqsubseteq_e v$ im Widerspruch zur Wahl von z.

Weil z und $\{m\}$ Atome sind, gibt es einen Isomorphismus

$H : (P(m+1), \subseteq) \longrightarrow (C(\mathfrak{A},\mathfrak{B},\varphi), \sqsubseteq)$ mit $H(\{m\}) = z$.

Das Komplement von $\{m\}$ in $P(m+1)$ ist m; wähle ein $b \in \mathfrak{B}$ mit $H(m) = con(b)$ und setze $\mathfrak{B}' := \langle b \rangle$.

Dann gilt $\varphi[\mathfrak{A}] \subseteq \mathfrak{B}'$ und

$H \restriction P(m) : (P(m), \subseteq) \longrightarrow (C(\mathfrak{A},\mathfrak{B}',\varphi), \sqsubseteq)$ ist Isomorphismus:

$\varphi[\mathfrak{A}] \subseteq \mathfrak{B}'$: Aus $con(\varphi(a)) = H(0) \sqsubseteq H(m) = con(b)$ folgt

$$\varphi[\mathfrak{A}] = \langle \varphi(a) \rangle \subseteq \langle b \rangle = \mathfrak{B}'.$$

$Nb(H \restriction P(m)) = C(\mathfrak{A},\mathfrak{B}',\varphi)$: "$\subseteq$" Sei $x \subseteq m$ und $c \in H(x)$. Dann gilt

$\mathrm{con}(c) = H(x) \subseteq H(m) = \mathrm{con}(b)$. Daraus folgt $\langle c\rangle \subseteq \langle b\rangle$, also $c \in \mathfrak{L}'$ und somit $H(x) \in C(\mathfrak{A},\mathfrak{L},\varphi) \cap \mathrm{Con}(\mathfrak{L}') = C(\mathfrak{A},\mathfrak{L}',\varphi)$.

" ? " Ist $y \in C(\mathfrak{A},\mathfrak{L}',\varphi)$, so gibt es ein $x \subseteq m+1$ mit $y = H(x)$.

Aus $y \subseteq \mathrm{con}(b) = H(m)$ folgt $x \subseteq m$.

Also sind $(C(\mathfrak{A},\mathfrak{L}',\varphi), \subseteq)$ und $(P(m), \subseteq)$ isomorph.

Nach Induktionsvoraussetzung gibt es ein $k \leq m$ und einen Isomorphismus $I : (P(m), \subseteq, R_k^m) \longrightarrow (C(\mathfrak{A},\mathfrak{L}',\varphi), \subseteq, \subseteq_e)$.

Mit Hilfe von I läßt sich nun ein Isomorphismus $\tilde{I} : (P(m+1), \subseteq, R_k^{m+1}) \longrightarrow (C(\mathfrak{A},\mathfrak{L},\varphi), \subseteq, \subseteq_e)$ definieren:

$$\tilde{I}(x) := \begin{cases} I(x) & , x \subseteq m \\ H(\{m\} \cup H^{-1}(I(x \setminus \{m\}))) & , m \in x \end{cases} .$$

$\tilde{I}$ ist bijektiv: Es genügt, die Surjektivität nachzuweisen.

Sei $y \in C(\mathfrak{A},\mathfrak{L},\varphi)$.

Ist $y \in C(\mathfrak{A},\mathfrak{L}',\varphi)$, so gibt es ein $x \subseteq m$ mit $y = I(x) = \tilde{I}(x)$.

Ist $y \notin C(\mathfrak{A},\mathfrak{L}',\varphi)$, so gibt es ein x mit $m \in x$ und $y = H(x)$.

Wegen $x \setminus \{m\} \subseteq m$ ist $H(x \setminus \{m\}) \in C(\mathfrak{A},\mathfrak{L}',\varphi)$, also $H(x \setminus \{m\}) = I(w)$ für ein $w \subseteq m$. $\tilde{I}(w \cup \{m\}) = H(\{m\} \cup H^{-1}(I(w)))$

$= H(\{m\} \cup H^{-1}(H(x \setminus \{m\})))$

$= H(\{m\} \cup (x \setminus \{m\}))$

$= y$.

$x \subseteq y$ gdw. $\tilde{I}(x) \subseteq \tilde{I}(y)$:

Weil $\tilde{I}$ Bijektion zwischen den beiden endlichen Booleschen Algebren $(P(m+1), \subseteq)$ und $(C(\mathfrak{A},\mathfrak{L},\varphi), \subseteq)$ ist, braucht man nur zu zeigen, daß $\tilde{I}$ ein Homomorphismus ist. Sei also $x \subseteq y \subseteq m+1$.

1) $m \in y \Longrightarrow x \setminus \{m\} \subseteq x \cup \{m\} \subseteq y$

$\Longrightarrow \tilde{I}(x \setminus \{m\}) = I(x \setminus \{m\})$

$\subseteq H(\{m\} \cup H^{-1}(I([x \cup \{m\}] \setminus \{m\})))$,

also $\widetilde{I}(x \setminus \{m\}) \subseteq \widetilde{I}(x \cup \{m\})$

$\subseteq H(\{m\} \cup H^{-1}(I(y \setminus \{m\})))$

$= \widetilde{I}(y)$.

Aus $x \setminus \{m\} = x$ oder $x \cup \{m\} = x$ folgt $\widetilde{I}(x) \subseteq \widetilde{I}(y)$.

2) $m \notin y \implies x \subseteq y \subseteq m$

$\implies \widetilde{I}(x) = I(x) \subseteq I(y) = \widetilde{I}(y)$.

$(x,y) \in R_k^{m+1}$ gdw. $\widetilde{I}(x) \subseteq_e \widetilde{I}(y)$:

Seien $x,y \subseteq m+1$.

1) $m \in x$: Dann gilt $(x,y) \in R_k^{m+1}$ gdw. $x \subseteq y$. Aus $x \subseteq y$ und $m \in x$ folgt $z = H(\{m\}) = \widetilde{I}(\{m\}) \subseteq \widetilde{I}(x) \subseteq \widetilde{I}(y) \subseteq v$, wegen $z \subseteq_e v$ also $\widetilde{I}(x) \subseteq_e \widetilde{I}(y)$. Umgekehrt folgt aus $\widetilde{I}(x) \subseteq_e \widetilde{I}(y)$, daß $\widetilde{I}(x) \subseteq \widetilde{I}(y)$ und daher $x \subseteq y$.

2) $m \notin x$: Aus $(x,y) \in R_k^{m+1}$ und $m \notin x$ folgt $(x,y) \in R_k^m$ und daher

$\widetilde{I}(x) = I(x) \subseteq_e I(y) \quad \widetilde{I}(y)$.

Sei umgekehrt $\widetilde{I}(x) \subseteq_e \widetilde{I}(y)$. Wäre $m \in y$, so $z = H(\{m\}) \subseteq \widetilde{I}(y) \subseteq v$, also $\widetilde{I}(y) \subseteq_e v$ (nach Wahl von z) und $\widetilde{I}(x) \subseteq_e v$; jedoch ist $\widetilde{I}(x) = I(x) = H(w)$ für ein $w \subseteq m$; aus $H(w) \subseteq_e v$ folgt aber $z \subseteq H(w)$, d.h. $H(\{m\}) \subseteq H(w)$ und damit $m \in w$. Widerspruch!

Also gilt $m \notin y$; wir haben somit $x,y \subseteq m$ und $I(x) = \widetilde{I}(x) \subseteq_e \widetilde{I}(y) = I(y)$; daher $(x,y) \in R_k^m \subseteq R_k^{m+1}$. □

1.18 Kor.:

(1) Ist $(\mathrm{Con}(\mathfrak{A}), \subseteq) \cong (P(m), \subseteq)$, so gibt es ein $k \leq m$ mit $(\mathrm{Con}(\mathfrak{A}), \subseteq, \subseteq_e) \cong (P(m), \subset, R_k^m)$.

(2) Ist $(\mathrm{Con}(\mathfrak{A} \setminus \mathfrak{N}), \subseteq) \cong (P(m), \subseteq)$, so gibt es ein $k \leq m$ mit $(\mathrm{Con}(\mathfrak{A} \setminus \mathfrak{N}), \subseteq, \subset_c) \cong (P(m), \subset, R_k^m)$.

Bew.: In (1) hat $\mathfrak{A}$, in (2) hat $\mathfrak{A} \setminus \mathfrak{N}$ eine kleinste Konstellation $x = \mathrm{con}(b)$. Sei $\varphi: \langle b \rangle \hookrightarrow \mathfrak{A}$ die Inklusionsabbildung. Im Fall (1) ist dann $C(\langle b \rangle, \mathfrak{A}, \varphi) = \mathrm{Con}(\mathfrak{A})$, im Fall (2) ist $C(\langle b \rangle, \mathfrak{A}, \varphi) = \mathrm{Con}(\mathfrak{A} \setminus \mathfrak{N})$. □

Sei $m \in \omega$. Aus Satz 1.17 folgt, daß sich die Erweiterungen $(\mathfrak{B}, \varphi)$ von $\mathfrak{A}$ mit $(C(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \varphi), \sqsubseteq) \cong (P(m), \subseteq)$ in m+1 Klassen einteilen lassen (festgelegt durch die Relationen R_k^m, $k \leq m$). In Kapitel 3 wird (mit CH) gezeigt, daß für einfach erzeugte Nichtstandardmodelle $\mathfrak{A}$ von $\mathrm{Th}(\mathfrak{N})$ alle diese Klassen nicht leer sind. Der Spezialfall $m = 1$ wird zusätzlich in Kapitel 2 behandelt; einerseits erhält man dort eine erste Vorstellung von den später benutzten Konstruktionsmethoden (ohne den Aufwand der dann erforderlichen kombinatorischen Hilfssätze); andererseits lassen sich leicht einige Ergebnisse über unmittelbare Nachfolger-Ultrafilter (in der Rudin-Keisler Ordnung der Ultrafilter auf ω) ableiten.

2. Unmittelbare Nachfolger von Ultrafiltern

In diesem Abschnitt wird der einfachste nichttriviale Fall des in Kapitel 1 angegebenen Erweiterungsproblems betrachtet: die Existenz von Erweiterungen $(\mathfrak{B},\varphi)$ von $\mathfrak{A}$ mit $(C(\mathfrak{A},\mathfrak{B},\varphi),\subseteq,\subseteq_e) \cong (P(1),\subseteq,R_k^1)$, $k \leq 1$, wo $\mathfrak{A}$ ein vorgegebenes einfach erzeugtes Modell von $Th(\mathfrak{N})$ ist.
Die dadurch motivierten Ultrafilterkonstruktionen sind aber auch unabhängig von dem genannten Erweiterungsproblem interessant, weil sich aus ihnen einige neue Ergebnisse über die Rudin-Keisler Ordnung der Ultrafilter auf ω ableiten lassen.

Insbesondere können die folgenden Resultate von Blass, Potthoff und Puritz verschärft werden:

(1) Jeder P-Punkt besitzt 2^c Nachfolger (in der Rudin-Keisler Ordnung), die ebenfalls P-Punkte sind.

A.Blass [1] bewies zuerst (mit Martins Axiom) die Existenz solcher Nachfolger; daß es sogar 2^c-viele Nachfolger gibt, zeigte K.Potthoff [11].
Aus den Konstruktionen von Ch.Puritz [12] folgt:

(2) Wenn CH gilt, gibt es zu jeder natürlichen Zahl $n \neq 0$ einfach erzeugte Modelle $\mathfrak{A}$ von $Th(\mathfrak{N})$ mit $|Sk(\mathfrak{A}\setminus\mathfrak{N})| = n$ und vorgeschriebener Verteilung der verketteten Himmel.

Diese Sätze lassen sich nun, CH vorausgesetzt, folgendermaßen verschärfen:
In (1) darf "Nachfolger" durch "unmittelbarer Nachfolger" ersetzt werden. In (2) darf für jeden der n Himmel von $\mathfrak{A}\setminus\mathfrak{N}$ vorgeschrieben sein, in welche endliche Zahl von Konstellationen er zerfallen soll.

Zunächst werden die Definition und einige später benötigte Eigenschaften der Rudin-Keisler Ordnung angegeben.

Sei D Ultrafilter auf ω, $f \in {}^{\omega}\omega$. Dann ist

$$f(D) := \{X \subseteq \omega \mid f^{-1}[X] \in D\}$$

ein Ultrafilter auf ω. Aus $f \restriction X = g \restriction X$ für ein $X \in D$ folgt $f(D) = g(D)$ (aber nicht umgekehrt). Die durch

$$D \trianglelefteq E \text{ :gdw. Es gibt ein } f \in {}^{\omega}\omega \text{ mit } D = f(E)$$

definierte Quasiordnung auf der Menge der Ultrafilter auf ω heißt Rudin-Keisler Ordnung. Für die zugehörige, durch

$$D \simeq E \text{ :gdw. } D \trianglelefteq E \text{ und } E \trianglelefteq D$$

definierte Äquivalenzrelation $\cong$ gilt das wichtige Lemma:

2.1 Lemma: (vgl. [14])

1) $D \cong E$ gdw. Es gibt ein bijektives $f \in {}^{\omega}\omega$ mit $D = f(E)$.

2) $D \cong f(D)$ gdw. Es gibt ein $X \in D$, so daß $f \restriction X$ injektiv ist.

Wir brauchen noch die folgenden Definitionen:

$$D \trianglelefteq_e E \text{ :gdw. Es gibt ein endliches } f \in {}^{\omega}\omega \text{ mit } D = f(E).$$

($D \trianglelefteq_e E$ wird gelesen "D liegt endlich unter E").

$$D \triangleleft E \text{ :gdw. } D \trianglelefteq E \text{ und } E \not\trianglelefteq D.$$

Gilt $D \triangleleft E$, so heißt E Nachfolger von D (bzw. D Vorgänger von E). Gilt $D \triangleleft E$, und gibt es kein F mit $D \triangleleft F \triangleleft E$, so heißt E unmittelbarer Nachfolger von D (bzw. D unmittelbarer Vorgänger von E).

Die Rudin-Keisler Ordnung läßt sich modelltheoretisch charakterisieren (vgl. [1]): Seien D,E Ultrafilter auf ω. Gilt $D = f(E)$, so ist $f^*: \mathfrak{N}^{\omega}/D \longrightarrow \mathfrak{N}^{\omega}/E$, definiert durch

$$f^*(g/D) := (g \circ f)/E$$

eine elementare Einbettung. f^* ist surjektiv, wenn f injektiv

auf einem $X \in E$ ist.

Sei umgekehrt $\varphi: \mathfrak{N}^\omega/D \longrightarrow \mathfrak{N}^\omega/E$ elementare Einbettung und $f \in {}^\omega\omega$ mit $\varphi(id_\omega/D) = f/E$; es ist dann $\varphi = f^*$ und $f(E) = D$.

Insgesamt folgt:

2.2 Lemma: Seien D,E Ultrafilter auf ω.

1) $D \trianglelefteq E$ gdw. $\mathfrak{N}^\omega/D$ ist elementar einbettbar in $\mathfrak{N}^\omega/E$.

2) $D \simeq E$ gdw. $\mathfrak{N}^\omega/D \cong \mathfrak{N}^\omega/E$.

Wir betrachten nun die folgende Situation:

$\mathfrak{A}$ sei einfach erzeugtes Modell von $Th(\mathfrak{N})$, $k \leq 1$, $(\mathfrak{B}, \varphi)$ Erweiterung von $\mathfrak{A}$ und $H: (P(1), \subseteq, R_k^1) \longrightarrow (C(\mathfrak{A},\mathfrak{B},\varphi), \leq, \leq_e)$ Isomorphismus. Dann hat $Con(\mathfrak{B})$ das größte Element $H(1)$, $\mathfrak{B}$ ist also einfach erzeugt (Lemma 1.4,(4)). Somit darf oBdA. angenommen werden: $\mathfrak{A} = \mathfrak{N}^\omega/D$, $\mathfrak{B} = \mathfrak{N}^\omega/E$ für geeignete Ultrafilter D,E auf ω. Aus den Bemerkungen vor Lemma 2.2 folgt, daß es ein $f \in {}^\omega\omega$ gibt mit $\varphi = f^*$ und $D = f(E)$. $\mathfrak{A}$ wird erzeugt von $a := id_\omega/D$, $\mathfrak{B}$ von $b := id_\omega/E$. Man rechnet leicht nach: $U_b = E$ und $\varphi(a) = f^{\mathfrak{B}}(b)$. $C(\mathfrak{A},\mathfrak{B},\varphi)$ besteht aus den beiden Elementen $H(0) = con(\varphi(a)) = con(f^{\mathfrak{B}}(b))$ und $H(1) = con(b)$. Ist $k = 1$, so folgt wegen $(0,1) \in R_1^1$, daß $H(0) \leq_e H(1)$, also (nach Lemma 1.7) f endlich auf einem $X \in U_b$ ($H(0)$ und $H(1)$ liegen in demselben Himmel). Ist $k = 0$, so folgt wegen $(0,1) \notin R_0^1$, daß $H(0) \not\leq_e H(1)$, also f auf keinem $X \in U_b$ endlich ($H(0)$ und $H(1)$ liegen in verschiedenen Himmeln).

Aus $H(0) \neq H(1)$ folgt nach Lemma 1.9: es gibt kein $X \in U_b$ mit $f \restriction X$ injektiv. Für jedes $g \in {}^\omega\omega$ muß gelten: $con(g^{\mathfrak{B}}(b)) = con(b)$ oder $con(g^{\mathfrak{B}}(b)) \in Con(\varphi[\mathfrak{A}])$, d.h. $con(g^{\mathfrak{B}}(b)) \leq con(\varphi(a))$;

im ersten Fall ist g injektiv auf einem $X \in U_b$ (Lemma 1.9), im zweiten Fall gibt es ein $h \in {}^{\omega}\omega$ mit $g^{\mathcal{U}}(b) = h^{\mathcal{U}}(\varphi(a))$, also $g^{\mathcal{U}}(b) = (h \circ f)^{\mathcal{U}}(b)$ und somit $g \restriction X = (h \circ f) \restriction X$ für ein $X \in U_b$. Wegen $U_b = E$ gelten daher (I), (II) und (III_k) von den folgenden Bedingungen:

(I) Ist $g \in {}^{\omega}\omega$, so gibt es ein $X \in E$ mit:
$g \restriction X$ injektiv oder g faktorisiert auf X über f.

(II) f ist auf keinem $X \in E$ injektiv.

(III_0) f ist auf keinem $X \in E$ endlich.

(III_1) f ist auf einem $X \in E$ endlich.

Ist $D = f(E)$ und gelten (I), (II) und (III_k), so folgt durch Umkehrung der obigen Schlüsse, daß $(C(\mathfrak{N}^{\omega}/D, \mathfrak{N}^{\omega}/E, f^*), \equiv, \equiv_e)$ isomorph ist zu $(P(1), \subseteq, R_k^1)$.
Außerdem ist E wegen (I) und (II) unmittelbarer Nachfolger von D: $D < E$ gilt wegen (II); aus $D \leq F < E$ folgt $F = g(E)$, wo g auf keinem $X \in E$ injektiv ist; wegen (I) muß es ein $X \in E$ und ein $h \in {}^{\omega}\omega$ geben mit $g \restriction X = (h \circ f) \restriction X$; daraus ergibt sich: $F = g(E) = h(f(E)) = h(D) \leq D$.

Für beliebig vorgegebenen freien Ultrafilter D auf ω wird nun (CH vorausgesetzt) gezeigt, daß es Ultrafilter E und Funktionen f mit $D = f(E)$ gibt, für die (I), (II) und (III_k) gelten $(k \leq 1)$.

Bem.: Falls D fixierter Ultrafilter ist und $D = f(E)$ gilt, sind (I), (II) und (III_0) genau dann erfüllt, wenn E minimaler Ultrafilter ist; für $k = 1$ jedoch gibt es keine Lösungen, weil sich dann (II) und (III_1) widersprechen.

Bem.: Sind X,Y beliebige abzählbare Mengen, so kann man durch $D \leq E$:gdw. $D = f(E)$ für ein $f \in {}^{Y}X$ Ultrafilter D auf X und E auf Y miteinander vergleichen. Die im Zusammenhang mit der Rudin-Keisler Ordnung betrachteten Eigenschaften, speziell Lemma 2.1, übertragen sich unmittelbar auf diese allgemeinere Situation.
Die Konstruktionen werden deshalb auf einer jeweils geeignet erscheinenden abzählbaren Menge (anstelle von ω) ausgeführt; mittels einer Bijektion zwischen dieser Menge und ω erhält man dann Ultrafilter auf ω mit den gewünschten Eigenschaften.
In diesem Kapitel wird E Ultrafilter auf $\omega\times\omega$ sein, und als f dient die erste Projektion $p:\omega\times\omega \longrightarrow \omega$. Zuerst betrachten wir den Fall $k = 1$, in dem p auf einer Ultrafiltermenge endlich sein muß.

2.3 Def.: Sei $h:\omega\times\omega \longrightarrow \omega\setminus 2$ eine Funktion mit den Eigenschaften

(1) $h(i+1,k) \geq (h(i,k))^2$ und

(2) $h(i,k+1) > \sum_{j<k} h(j,j)$ für alle $i,k \in \omega$.

Die Existenz solcher Funktionen ist leicht zu sehen; man definiere h(i,k) durch Induktion über $\max\{i,k\}$.
Eine unmittelbare Folgerung ist

(3) $i < j \longrightarrow h(i,k) < h(j,k)$ $(i,j,k \in \omega)$.

2.4 Def.: D sei freier Ultrafilter auf ω, h wie in 2.3, $p:\omega\times\omega \longrightarrow \omega$ sei die erste Projektion, $A \subseteq \omega\times\omega$.
$M(A,i) := \{x\in\omega \mid |p^{-1}(x) \cap A| \geq h(i,x)\}$ $(i\in\omega)$.

A heiße groß (bzgl.D) :gdw. $M(A,i) \in D$ für alle $i \in \omega$.
A heiße klein :gdw. A nicht groß.

Bem.: Wegen (3) ist die Bedingung "$M(A,i) \in D$ für alle $i \in \omega$" gleichbedeutend mit "$M(A,i) \in D$ für unendlich viele $i \in \omega$".

2.5 Lemma: Seien $A,B \subseteq \omega \times \omega$.

(1) A endlich $\Longrightarrow$ A klein.

(2) A groß, $A \subseteq B$ $\Longrightarrow$ B groß.

(3) $A \cup B$ groß $\Longrightarrow$ A groß oder B groß.

Bew.:

(1) gilt, weil D frei ist. (2) ist trivial.

(3) Für jedes $i \in \omega$ gilt $M(A \cup B, i+1) \subseteq M(A,i) \cup M(B,i)$ wegen $h(i+1,x) > h(i,x)$. $A \cup B$ ist groß, also $M(A \cup B, i+1) \in D$ und deshalb $M(A,i) \in D$ oder $M(B,i) \in D$. Sei etwa $M(A,i) \in D$ für unendlich viele $i \in \omega$; dann ist A groß. □

Bem.: Der hier definierte Begriff von "groß" ist eine Verstärkung des von Blass in [1] zur Konstruktion von Nachfolger-P-Punkten benutzten Begriffes; daher gilt $E > D$ für jeden Ultrafilter E, der nur große Mengen enthält. Mit Hilfe des folgenden Lemmas können wir dafür sorgen, daß E alle in (I) geforderten Mengen enthält, also unmittelbarer Nachfolger von D wird.

2.6 Lemma: Sei $\mathcal{B}$ abzählbare Filterbasis aus großen Mengen, $f: \omega \times \omega \to \omega$. Dann gibt es ein $A \subseteq \omega \times \omega$ mit:

(1) $A \cap B$ ist groß für alle $B \in \mathcal{B}$ und

(2) f ist auf A injektiv oder faktorisiert auf A über p.

Bew.: Sei $\mathfrak{B} = \{B_i \mid i \in \omega\}$, oBdA. $B_{i+1} \subseteq B_i$ $(i \in \omega)$.

Für alle $i \in \omega$ gilt $M(B_i, i+2) \in D$, weil B_i groß ist.

D ist freier Ultrafilter; es gibt deshalb eine Folge $\langle u_i \mid i \in \omega \rangle$ in D mit $u_{i+1} \subseteq u_i \subseteq M(B_i, i+2) \setminus i$ für alle $i \in \omega$.

Sei $x \in u_o$. Setze $s(x) := \max\{i \in \omega \mid x \in u_i\}$ und wähle ein $S_x \subseteq \omega$ mit $|S_x| = h(s(x)+2, x)$ und $\{x\} \times S_x \subseteq B_{s(x)}$.

$$v := \left\{ x \in u_o \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{es gibt ein } S \subseteq S_x \text{ mit } |S| = h(s(x),x), \\ \text{so daß } f \text{ auf } \{x\} \times S \text{ konstant ist.} \end{array} \right\}$$

1.Fall: $v \in D$. Wähle für jedes $x \in v$ ein $S'_x \subseteq S_x$ mit:

$|S'_x| = h(s(x),x)$ und f auf $\{x\} \times S'_x$ konstant.

Setze $A := \bigcup \{\{x\} \times S'_x \mid x \in v\}$. Auf A faktorisiert f über p.

Für alle $i,j \in \omega$ gilt: $v \cap u_{\max\{i,j\}} \subseteq M(A \cap B_i, j)$:

Sei $x \in v \cap u_{\max\{i,j\}}$. Dann ist $s(x) \geq i$ und $s(x) \geq j$, also $\{x\} \times S'_x \subseteq B_{s(x)} \cap A \subseteq B_i \cap A$ und $|S'_x| = h(s(x),x) \geq h(j,x)$; somit $x \in M(A \cap B_i, j)$.

Aus $v \in D$ und $u_{\max\{i,j\}} \in D$ folgt $M(A \cap B_i, j) \in D$ für alle $i,j \in \omega$ und deshalb $A \cap B_i$ groß für alle $i \in \omega$.

2.Fall: $v \notin D$. Dann ist $w := u_o \setminus v \in D$. Durch Induktion auf w definieren wir eine Folge $\langle S'_x \mid x \in w \rangle$ mit:

(a) $S'_x \subseteq S_x$ und $|S'_x| = h(s(x),x)$ $\quad (x \in w)$,

(b) f injektiv auf $\{x\} \times S'_x$ $\quad (x \in w)$,

(c) $f[\{x\} \times S'_x] \cap f[\{y\} \times S'_y] = 0$ $\quad (x,y \in w;\ x \neq y)$.

Sei $x \in w$; für $y \in w, y < x$ sei S'_y bereits definiert.

Zerlege $\{x\} \times S_x$ in Fasern bzgl. f. Wegen $x \notin v$ enthält jede Faser weniger als $h(s(x),x)$ Elemente. Aus $|S_x| = h(s(x)+2,x)$ und $h(s(x)+2,x) \geq (h(s(x)+1,x))^2 \geq h(s(x),x) \cdot h(s(x)+1,x)$ folgt, daß $\{x\} \times S_x$ in mindestens $h(s(x)+1,x)$ Fasern bzgl. f

zerfällt; es gibt also ein $T \subseteq S_x$ mit: $|T| = h(s(x)+1,x)$ und f injektiv auf $\{x\} \times T$. Sei $X := f\left[\bigcup\{\{y\} \times S'_y \mid y \in w,\ y < x\}\right]$.
Es gilt (beachte $s(y) \leq y$ und Eigenschaften (2),(3) von h):

$$|X| \leq \sum_{y<x} h(s(y),y) \leq \sum_{y<x} h(y,y) \leq h(s(x),x).$$

Aus $|T| = h(s(x)+1,x) \geq 2h(s(x),x)$ und der Injektivität von f auf $\{x\} \times T$ folgt daher die Existenz von $S'_x \subseteq T$ mit $|S'_x| = h(s(x),x)$ und $f[\{x\} \times S'_x] \cap X = 0$.
Damit ist die Konstruktion der Folge $\langle S'_x \mid x \in w\rangle$ abgeschlossen. Auf $A := \bigcup\{\{x\} \times S'_x \mid x \in w\}$ ist f injektiv, und aus $w \cap u_{\max\{i,j\}} \subseteq M(A \cap B_i, j)$ für alle $i,j \in \omega$ folgt $A \cap B_i$ groß für alle $i \in \omega$. □

2.7 Lemma: Sei $\mathfrak{B}$ abzählbare Filterbasis aus großen Mengen.
Dann gibt es $A_0, A_1 \subseteq \omega \times \omega$ mit:
$A_0 \cap A_1 = 0$ und $A_i \cap B$ groß für alle $B \in \mathfrak{B}$ $(i \leq 1)$.

Bew.: Sei $\mathfrak{B} = \{B_i \mid i \in \omega\}$, oBdA. $B_{i+1} \subseteq B_i$ $(i \in \omega)$, und sei $\langle u_i \mid i \in \omega\rangle$ eine Folge in D mit $u_{i+1} \subseteq u_i \subseteq M(B_i, i+1) \setminus i$ für alle $i \in \omega$. Für $x \in u_0$ setze $s(x) := \max\{i \in \omega \mid x \in u_i\}$ und wähle ein $S_x \subseteq \omega$ mit $|S_x| = h(s(x)+1,x)$ und $\{x\} \times S_x \subseteq B_{s(x)}$.
Aus $|S_x| = h(s(x)+1,x) \geq 2h(s(x),x)$ folgt, daß es $S_{x,i} \subseteq S_x$ gibt $(i \leq 1)$ mit $|S_{x,i}| = h(s(x),x)$ und $S_{x,0} \cap S_{x,1} = 0$.
Setze $A_i := \bigcup\{\{x\} \times S_{x,i} \mid x \in u_0\}$ $(i \leq 1)$. □

Das folgende Lemma ist anwendbar auf jeden Begriff von "groß" auf $\omega \times \omega$, der die Eigenschaften aus Lemma 2.5, 2.6 und 2.7 hat.

2.8 Lemma: Es gelte CH. Gegeben sei ein Begriff von "groß" auf $\omega\times\omega$ mit den Eigenschaften aus 2.5,2.6 und 2.7. Zu jeder großen Menge $A\subseteq\omega\times\omega$ gibt es dann 2^c Ultrafilter F auf $\omega\times\omega$ mit:

(1) $A\in F$,

(2) F enthält nur große Mengen,

(3) jedes $f:\omega\times\omega\longrightarrow\omega$ ist auf einem $X\in F$ injektiv oder faktorisiert auf einem $X\in F$ über die erste Projektion $p:\omega\times\omega\longrightarrow\omega$.

Bew.: Sei $\langle f_\alpha \mid \alpha<c\rangle$ Aufzählung der Funktionen von $\omega\times\omega$ nach ω. Für jedes $\varphi: c\longrightarrow 2$ definieren wir eine Folge $\langle \mathcal{B}^\varphi_\alpha \mid \alpha<c\rangle$ von Filterbasen auf $\omega\times\omega$ mit den Eigenschaften:

(i) $\mathcal{B}^\varphi_\alpha$ ist höchstens abzählbar,

(ii) $A\in\mathcal{B}^\varphi_\alpha$ und $\mathcal{B}^\varphi_\alpha$ besteht nur aus großen Mengen.

(iii) Es gibt ein $X\in\mathcal{B}^\varphi_{\alpha+1}$, so daß f_α auf X injektiv ist oder auf X über p faktorisiert.

(iv) $\mathcal{B}^\varphi_\alpha\subseteq\mathcal{B}^\varphi_\beta$ für $\alpha<\beta$.

(v) Ist $\alpha<c$ minimal mit $\varphi(\alpha)\neq\psi(\alpha)$, so ist $\mathcal{B}^\varphi_\alpha=\mathcal{B}^\psi_\alpha$, und es gibt $B\in\mathcal{B}^\varphi_{\alpha+1}$, $C\in\mathcal{B}^\psi_{\alpha+1}$ mit $B\cap C=0$.

Die Definition erfolgt durch Induktion über α.

$\mathcal{B}^\varphi_0 := \{A\}$.

$\mathcal{B}^\varphi_\alpha := \bigcup\{\mathcal{B}^\varphi_\beta \mid \beta<\alpha\}$, falls $\alpha<c$ Limeszahl ist. $\mathcal{B}^\varphi_\alpha$ ist höchstens abzählbar, da dies nach Induktionsvoraussetzung für alle $\mathcal{B}^\varphi_\beta$ $(\beta<\alpha)$ und wegen $c=\omega_1$ (CH) für α gilt.

Sei nun $\alpha=\beta+1$ und $\mathcal{B}^\varphi_\beta$ bereits definiert. Aus 2.7 erhält man $A_0,A_1\subseteq\omega\times\omega$ mit: $A_0\cap A_1=0$ und $A_i\cap B$ groß für alle $B\in\mathcal{B}^\varphi_\beta$ $(i\leq 1)$. Wähle A_0,A_1 unabhängig von φ (etwa wie bei

Blass [1]). $\mathcal{L}$ sei die von $\mathcal{L}^{\varphi}_{\beta} \cup \{A_{\varphi(\beta)}\}$ erzeugte Filterbasis (Abschluß unter endlichen Durchschnitten). $\mathcal{L}$ ist höchstens abzählbar und besteht nur aus großen Mengen. Nach 2.6 gibt es ein $C \subseteq \omega\times\omega$ mit: $B \cap C$ ist groß für alle $B \in \mathcal{L}$ und f_β ist auf C injektiv oder faktorisiert auf C über p.
$\mathcal{L}^{\varphi}_{\alpha}$ sei die von $\mathcal{L} \cup \{C\}$ erzeugte Filterbasis.
Die so definierten $\mathcal{L}^{\varphi}_{\alpha}$ haben alle geforderten Eigenschaften.
$\mathcal{L}_0 := \{B \subseteq \omega\times\omega \mid \omega\times\omega \setminus B \text{ ist klein}\}$ ist wegen 2.5 ein Filter. Aus (ii) und (iv) folgt, daß $\mathcal{L}^{\varphi} := \mathcal{L}_0 \cup \bigcup\{\mathcal{L}^{\varphi}_{\alpha} \mid \alpha < c\}$ die endliche Durchschnittseigenschaft hat. Es gibt also einen Ultrafilter F^{φ} auf $\omega\times\omega$ mit $\mathcal{L}^{\varphi} \subseteq F^{\varphi}$. F^{φ} erfüllt die Bedingungen (1) bis (3), und aus (v) folgt $F^{\varphi} \neq F^{\psi}$ für $\varphi \neq \psi$. □

2.9 Satz: Es gelte CH. D sei freier Ultrafilter auf ω.
Dann gibt es ein $g \in {}^{\omega}\omega$ und 2^c Ultrafilter E auf ω mit:

(1) $D = g(E) < E$.

(2) Jedes $f \in {}^{\omega}\omega$ ist auf einem $X \in E$ injektiv oder faktorisiert auf einem $X \in E$ über g.

(3) g ist endlich auf einem $X \in E$.

Bew.: Wir wenden Lemma 2.8 an auf den in 2.4 definierten Begriff "groß" (bzgl.D), ausgehend von einer großen Menge A, auf der p endlich ist (etwa $A = \bigcup\{\{x\} \times S_x \mid x \in \omega\}$ mit $S_x \subseteq \omega$, $|S_x| = h(x,x)$). Sei $\pi : \omega\times\omega \longrightarrow \omega$ Bijektion. $g := p \circ \pi^{-1}$ und die Ultrafilter $\pi(F)$, wo F gemäß Lemma 2.8 gefunden ist, haben die geforderten Eigenschaften:

(1) Es genügt zu zeigen: $D = p(F)$ und $D < F$.
$D = p(F)$: Sei $v \in p(F)$. Dann ist $p^{-1}[v]$ groß (weil Ele-

ment von F). Aus $M(p^{-1}[v],0) \subseteq v$ folgt $v \in D$. Also gilt $p(F) \subseteq D$ und somit $p(F) = D$.

$D < F$: Sei $B \in F$. Dann ist B groß; es gibt daher $x,y,z \in \omega$ mit $y \neq z$ und $(x,y),(x,z) \in B$. Also ist p nicht auf B injektiv.

Die Gültigkeit von (2) und (3) folgt daraus, daß wegen 2.8 und der Wahl von A die entsprechenden Aussagen für p und F gelten. □

2.10 Bem.: Aus der Existenz von 2^c Ultrafiltern auf ω mit einer gewissen Eigenschaft folgt unmittelbar die Existenz von 2^c paarweise nichtisomorphen Ultrafiltern mit der betreffenden Eigenschaft, da nach 2.1,1) die Isomorphieklassen höchstens c Elemente enthalten.

2.11 Lemma: E sei Ultrafilter auf ω, $G \subseteq {}^{\omega}\omega$, $G \neq 0$.
Für jedes $g \in G$ sei g(E) ein P-Punkt. Es gelte:
Jedes $f \in {}^{\omega}\omega$ ist auf einem $X \in E$ endlich oder faktorisiert auf einem $X \in E$ über ein $g \in G$.
Dann sind äquivalent:

(1) E ist P-Punkt.

(2) Jedes $g \in G$ ist auf einem $X \in E$ endlich.

Bew.:

"(1)$\Rightarrow$(2)" Sei $g \in G$. Weil E P-Punkt ist, gibt es ein $X \in E$, auf dem g endlich oder konstant ist. Weil g(E) frei ist, kann g nicht auf X konstant sein.

"(2)$\Rightarrow$(1)" Sei $f \in {}^{\omega}\omega$ auf keinem $X \in E$ endlich. Nach Voraussetzung gibt es dann $X \in E$, $g \in G$, $k \in {}^{\omega}\omega$ mit:
$f{\restriction}X = k \circ g{\restriction}X$ und g auf X endlich. Weil g(E) P-Punkt

ist, gibt es ein $Y \in g(E)$, auf dem k endlich oder konstant ist. Würde k auf Y endlich sein, so wäre (vgl. 1.11) $k \circ g$ und somit f endlich auf $X \cap g^{-1}[Y] \in E$. Widerspruch! Also ist k auf Y konstant. Es folgt, daß f auf $X \cap g^{-1}[Y] \in E$ konstant ist. □

2.12 Satz: Es gelte CH. Dann hat jeder P-Punkt 2^c unmittelbare Nachfolger in der Rudin-Keisler Ordnung der P-Punkte.

Bew.: Ist D ein P-Punkt, so sind die in 2.9 konstruierten Nachfolger von D ebenfalls P-Punkte (folgt aus 2.11). Aus Bedingung (2) in 2.9 folgt, daß alle diese P-Punkte unmittelbare Nachfolger von D sind. □

Damit ist der Fall $k = 1$ abgeschlossen. Im Fall $k = 0$ lautet eine der Bedingungen, daß die erste Projektion $p: \omega \times \omega \longrightarrow \omega$ auf keiner Ultrafiltermenge endlich sein darf. Durch diese Forderung wird der entsprechende Begriff von "groß" festgelegt; er wird zur Unterscheidung von dem bisher benutzten "ω-groß" genannt.

2.13 Def.: D sei freier Ultrafilter auf ω, $A \subseteq \omega \times \omega$.

$M(A) := \{x \in \omega \mid |p^{-1}(x) \cap A| = \omega\}$.

A ω-groß (bzgl.D) :gdw. $M(A) \in D$.

A ω-klein :gdw. A nicht ω-groß.

Bem.: Jede ω-große Menge ist groß im Sinne von Def. 2.4.

2.14 Lemma: Seien $A,B \subseteq \omega\times\omega$.

(1) A endlich $\Longrightarrow$ A ω-klein.

(2) A ω-groß, $A \subseteq B$ $\Longrightarrow$ B ω-groß.

(3) $A \cup B$ ω-groß $\Longrightarrow$ A ω-groß oder B ω-groß.

Bew.: (1) und (2) sind trivial. (3) folgt aus
$M(A \cup B) = M(A) \cup M(B)$. □

2.15 Lemma: Sei $\mathfrak{F}$ abzählbare Filterbasis aus ω-großen Mengen, $f: \omega\times\omega \longrightarrow \omega$. Dann gibt es ein $A \subseteq \omega\times\omega$ mit:

(1) $A \cap B$ ist ω-groß für alle $B \in \mathfrak{F}$ und

(2) f ist auf A injektiv oder faktorisiert auf A über p.

Bew.: Man kann oBdA. $\mathfrak{F} = \{B_i \mid i \in \omega\}$ mit $B_{i+1} \subseteq B_i$ $(i \in \omega)$ annehmen. Seien $u_i \in D$ mit $u_{i+1} \subseteq u_i \subseteq M(B_i) \setminus i$ für alle $i \in \omega$ (Existenz: alle B_i sind ω-groß, und D ist frei). Setze $s(x) := \max\{i \in \omega \mid x \in u_i\}$ $(x \in u_o)$,

$v := \{x \in u_o \mid f[p^{-1}(x) \cap B_{s(x)}]$ ist endlich$\}$.

1.Fall: $v \in D$. Sei $x \in v$. Weil das Bild der unendlichen Menge $p^{-1}(x) \cap B_{s(x)}$ unter f endlich ist, muß ein Funktionswert unendlich oft angenommen werden. Es gibt also $S_x \subseteq \omega$ mit: $\{x\} \times S_x \subseteq B_{s(x)}$, $|S_x| = \omega$, f auf $\{x\} \times S_x$ konstant. Auf $A := \bigcup \{\{x\} \times S_x \mid x \in v\}$ faktorisiert f über p. Wegen $v \cap u_n \subseteq M(A \cap B_n)$ gilt $A \cap B_n$ ω-groß für alle $n \in \omega$.

2.Fall: $v \notin D$. Dann ist $w := u_o \setminus v \in D$. Sei $\langle x_i \mid i \in \omega\rangle$ Aufzählung von w, in der jedes $x \in w$ unendlich oft vorkommt. Es gibt eine Folge $\langle y_i \mid i \in \omega\rangle$ mit:

(a) $(x_i, y_i) \in B_{s(x_i)}$ und

(b) $f(x_i, y_i) \neq f(x_j, y_j)$ für alle $i,j \in \omega$, $i \neq j$,

denn weil $f[p^{-1}(x_i) \cap B_{s(x_i)}]$ unendlich ist, gibt es zu $x_i \in w$ ein $y_i \in \omega$ mit $(x_i,y_i) \in B_{s(x_i)}$ und $f(x_i,y_i) \neq f(x_j,y_j)$ für alle $j < i$.

Setze $S_x := \{y_i \mid x_i = x\}$ $(x \in w)$. Dann gilt $|S_x| = \omega$ und $\{x\} \times S_x \subseteq B_{s(x)}$.

Auf $A := \bigcup\{\{x\} \times S_x \mid x \in w\}$ ist f injektiv:

Seien $(x,y),(x',y') \in A$, $(x,y) \neq (x',y')$. Dann ist $y \in S_x$, also $y = y_i$ mit $x_i = x$, und analog $y' = y_j$ mit $x_j = x'$. Es folgt $i \neq j$ und daher $f(x,y) = f(x_i,y_i) \neq f(x_j,y_j) = f(x',y')$.

Daß $A \cap B_n$ ω-groß ist für alle $n \in \omega$, folgt aus $w \cap u_n \subseteq M(A \cap B_n)$. □

2.16 Lemma: Sei $\mathfrak{B}$ abzählbare Filterbasis aus ω-großen Mengen. Dann gibt es $A_0,A_1 \subseteq \omega \times \omega$ mit $A_0 \cap A_1 = 0$ und $A_i \cap B$ ω-groß für alle $B \in \mathfrak{B}$ $(i \leq 1)$.

Bew.: OBdA. sei $\mathfrak{B} = \{B_i \mid i \in \omega\}$ mit $B_{i+1} \subseteq B_i$ $(i \in \omega)$.

Es gibt $u_i \in D$ mit $u_{i+1} \subseteq u_i \subseteq M(B_i) \setminus i$ $(i \in \omega)$.

Für $x \in u_0$ sei $s(x) := \max\{i \in \omega \mid x \in u_i\}$, $S_x \subseteq \omega$ mit $|S_x| = \omega$ und $\{x\} \times S_x \subseteq B_{s(x)}$. Wähle für $i = 0,1$ disjunkte $S_{x,i} \subseteq S_x$ mit $|S_{x,i}| = \omega$ und setze $A_i := \bigcup\{\{x\} \times S_{x,i} \mid x \in u_0\}$. □

2.17 Satz: Es gelte CH. D sei freier Ultrafilter auf ω.

Dann gibt es ein $g \in {}^{\omega}\omega$ und 2^c Ultrafilter E auf ω mit:

(1) [illegible]

(2) Jedes $f \in {}^{\omega}\omega$ ist auf einem $X \in E$ injektiv oder faktorisiert auf einem $X \in E$ über g.

(3) g ist auf keinem $X \in E$ endlich.

Bew.: Die Lemmata 2.14 bis 2.16 zeigen, daß der Begriff "ω-groß" (bzgl.D) die Eigenschaften von 2.5 bis 2.7 hat. Mit Hilfe von 2.8 kann man daher - von einer beliebigen ω-großen Menge A ausgehend - die Ultrafilter E wie in Satz 2.9 konstruieren. Eigenschaft (1) folgt wie in 2.9, da jede ω-große Menge groß im früheren Sinn ist. (3) folgt daraus, daß p auf keiner ω-großen Menge endlich ist. □

Bem.: Wegen (2) ist nicht nur g, sondern jedes $f \in {}^{\omega}\omega$ mit $D = f(E)$ auf keinem $X \in E$ endlich (E liegt also nicht endlich über D): Aus $f(E) = D < E$ folgt: f ist auf keinem $X \in E$ injektiv; nach (2) faktorisiert f auf einem $X \in E$ über g und kann daher wegen (3) auf keiner Ultrafiltermenge endlich sein.

2.18 Lemma: E sei Ultrafilter auf ω, $G \subseteq {}^{\omega}\omega$, $G \neq 0$.
Für jedes $g \in G$ sei g(E) freier Ultrafilter mit $g(E) < E$. Es gelte:
Jedes $f \in {}^{\omega}\omega$ ist auf einem $X \in E$ injektiv oder faktorisiert auf einem $X \in E$ über ein $g \in G$.
Dann sind äquivalent:

(1) E ist rar.

(2) Kein $g \in G$ ist auf einem $X \in E$ endlich.

Bew.:

"(1) $\Rightarrow$ (2)" Sei $g \in G$. Wegen $g(E) < E$ ist g auf keinem $X \in E$ injektiv; deshalb kann g auf keinem $X \in E$ endlich sein, wenn E rar ist.

"(2) $\Rightarrow$ (1)" Sei $f \in {}^{\omega}\omega$ endlich. Dann kann f wegen (2) auf

keinem $X \in E$ über ein $g \in G$ faktorisieren, muß also auf einem $X \in E$ injektiv sein. □

2.19 Kor.: Die Ultrafilter E aus 2.17 sind rar.

Durch Anwendung von 2.9 und 2.17 ergibt sich:

2.20 Satz: Es gelte CH. $\mathfrak{A}$ sei einfach erzeugtes Nichtstandardmodell von $Th(\mathfrak{N})$, $k \leq 1$. Dann gibt es 2^c (paarweise nichtisomorphe) Erweiterungen $(\mathfrak{B}, \varphi)$ von $\mathfrak{A}$ mit $(C(\mathfrak{A},\mathfrak{B},\varphi), \subseteq, \subseteq_e) \cong (P(1), \subseteq, R_k^1)$.

Bew.: Sei $\mathfrak{A} = \langle a \rangle$, $D := U_a$. Dann gibt es einen Isomorphismus $\Psi : \mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{N}^\omega/D$ mit $\Psi(a) = id_\omega/D$. D ist frei, weil $\mathfrak{A}$ echte Erweiterung von $\mathfrak{N}$ ist. Konstruiere E wie in 2.9 (falls $k = 1$) bzw. 2.17 (falls $k = 0$) und setze $\mathfrak{B} := \mathfrak{N}^\omega/E$, $\varphi := g^* \circ \Psi$. □

Ebenfalls mit 2.9 und 2.17 können wir nun abschließend das anfangs genannte Resultat von Puritz verschärfen.

2.21 Satz: Es gelte CH. Dann gibt es zu jedem $n \in \omega \setminus 1$ und jeder Folge $\langle i_k \mid k < n \rangle$ in $\omega \setminus 1$ 2^c paarweise nichtisomorphe einfach erzeugte Modelle $\mathfrak{A}$ von $Th(\mathfrak{N})$ mit:

(1) $\mathfrak{A} \setminus \mathfrak{N}$ zerfällt in genau n Himmel.

(2) Der k-te Himmel von $\mathfrak{A} \setminus \mathfrak{N}$ besteht aus genau i_k Konstellationen.

(3) $(Con(\mathfrak{A} \setminus \mathfrak{N}), \subseteq)$ ist linear geordnet.

Bew.: Sei D ein minimaler Ultrafilter. Dann hat $\mathfrak{N}^{\omega}/D \setminus \mathfrak{N}$ genau eine Konstellation, also auch nur einen Himmel. Durch Anwendung von 2.9 und 2.17 kann man nun schrittweise jeweils eine neue Konstellation anfügen; dabei entsteht ein neuer Himmel genau dann, wenn man 2.17 benutzt (das folgt aus 1.7). □

3. Endliche Boolesche Algebren in der Rudin-Keisler Ordnung

A.Blass zeigte in [1], daß es P-Punkte mit zwei unvergleichbaren Vorgängern gibt (die dann ebenfalls P-Punkte sind). Unter Voraussetzung der Kontinuumhypothese wird im folgenden ein weitergehendes Resultat über die Rudin-Keisler Ordnung der P-Punkte bewiesen (Satz 3.22):
Zu jedem P-Punkt D und jeder endlichen Booleschen Algebra $\mathbb{B}$ gibt es 2^c P-Punkte $E \geq D$, für die das Intervall $[D,E]$ zu $\mathbb{B}$ isomorph ist (für $\mathbb{B} = P(1)$ ist dies Satz 2.12).
Außerdem wird (mit CH) die Existenz der nach Kapitel 1 möglichen Erweiterungen von Nichtstandardmodellen der Arithmetik gezeigt; genauer (Satz 3.20):
Ist $\mathfrak{A}$ einfach erzeugtes Nichtstandardmodell von $Th(\mathfrak{N})$, $m \in \omega \setminus 1$, $k \leq m$, so gibt es 2^c Erweiterungen $(\mathfrak{B}, \varphi)$ von $\mathfrak{A}$ mit $(\mathfrak{B}(\mathfrak{A},\mathfrak{B},\varphi), \subset, \subseteq) \sim (P(m), \subseteq, P^m_k)$.

Für die angestrebten Ultrafilterkonstruktionen werden zwei kombinatorische Hilfssätze benötigt, die sich als Anwendung des Satzes von Ramsey ergeben. Die vorkommenden Mengen seien linear geordnet (irreflexiv), Teilmengen von ω durch die natürliche Ordnung auf ω.

3.1 Lemma: Seien $k,m \in \omega$. Zu jedem $n \in \omega$ gibt es ein $n' \in \omega$ mit der folgenden Eigenschaft: Ist $|X| = n'$, $|Y| = \omega$, $l \in \omega$ und $[X]^k \times [Y]^l = \bigcup \{A_i \mid i < m\}$, so existieren $X' \subseteq X$, $Y' \subseteq Y$, $i < m$ mit $|X'| = n$, $|Y'| = \omega$ und $[X']^k \times [Y']^l \subseteq A_i$.

Bew.: Nach dem Satz von Ramsey (für endliche Mengen) gibt es zu $k,m,n \in \omega$ ein $n' \in \omega$ derart, daß für alle X gilt: Ist $|X| = n'$ und $[X]^k = \bigcup\{A_i \mid i<m\}$, so existieren $X' \subseteq X$ und $i<m$ mit $|X'| = n$ und $[X']^k \subseteq A_i$; n' hat die gewünschte Eigenschaft: Sei $|X| = n'$, $|Y| = \omega$, $l \in \omega$ und $[X]^k \times [Y]^l = \bigcup\{A_i \mid i<m\}$. Für $X' \subseteq X$, $i<m$ setze $X'(i) := \{y \in [Y]^l \mid [X']^k \times \{y\} \subseteq A_i\}$. Nach Wahl von n' gibt es zu jedem $y \in [Y]^l$ ein $X' \subseteq X$, $|X'| = n$, und ein $i<m$ mit $[X']^k \times \{y\} \subseteq A_i$. Daraus folgt $[Y]^l = \bigcup\{X'(i) \mid X' \subseteq X, |X'| = n, i<m\}$.
Nach dem Satz von Ramsey (für unendliche Mengen) gibt es $Y' \subseteq Y$, $X' \subseteq X$, $i<m$ mit $|Y'| = \omega$, $|X'| = n$ und $[Y']^l \subseteq X'(i)$, d.h. $[X']^k \times [Y']^l \subseteq A_i$. □

3.2 Lemma: Seien $k,l \in \omega$. Zu jedem $n \in \omega$ gibt es ein $n' \in \omega$ mit der folgenden Eigenschaft:
Ist $|X| = n'$, $|Y| = \omega$ und f eine auf $[X]^k \times [Y]^l$ definierte Funktion, so gibt es $X' \subseteq X$, $Y' \subseteq Y$, $a \subseteq k$, $b \subseteq l$ mit $|X'| = n$, $|Y'| = \omega$ derart, daß für alle $x,x' \in [X']^k$, $x = (x_0,\dots,x_{k-1})$, $x' = (x'_0,\dots,x'_{k-1})$, und alle $y,y' \in [Y']^l$, $y = (y_0,\dots,y_{l-1})$, $y' = (y'_0,\dots,y'_{l-1})$ gilt:
$f(x,y) = f(x',y')$ gdw. $x_i = x'_i$ für alle $i \in a$ und $y_j = y'_j$ für alle $j \in b$.

Bew.: Seien $k,l,n \in \omega$ und $m := 2^{\binom{2k}{k}^{\frown} \cdot \binom{2l}{l}^{\frown}}$. Wähle n' gemäß Lemma 3.1 so, daß aus $|X| = n'$, $|Y| = \omega$ und $[X]^{2k} \times [Y]^{2l} = \bigcup\{A_i \mid i<m\}$ die Existenz von $X' \subseteq X$, $Y' \subseteq Y$, $i<m$ mit $|X'| = \max\{n,3k\}$, $|Y'| = \omega$ und $[X']^{2k} \times [Y']^{2l} \subseteq A_i$ folgt.
Sei nun $|X| = n'$, $|Y| = \omega$ und f eine auf $[X]^k \times [Y]^l$ definierte

Funktion. Für $v \in [X]^{2k}$, $v = (v_0,\ldots,v_{2k-1})$, und $s \in [2k]^k$, $s = (s_0,\ldots,s_{k-1})$ sei $v\restriction s := (v_{s_0},\ldots,v_{s_{k-1}})$; analog $w\restriction t$ für $w \in [Y]^{2l}$, $t \in [2l]^l$. Auf $[X]^{2k} \times [Y]^{2l}$ wird eine Äquivalenzrelation π definiert durch

$(v,w)\,\pi\,(v',w')$:gdw. Für alle $s,s' \in [2k]^k$, $t,t' \in [2l]^l$ gilt:

$$f(v\restriction s, w\restriction t) = f(v\restriction s', w\restriction t') \text{ gdw.}$$
$$f(v\restriction s, w'\restriction t) = f(v'\restriction s', w'\restriction t').$$

π hat höchstens m Äquivalenzklassen. Nach Wahl von n' gibt es daher $X' \subseteq X$, $Y' \subseteq Y$ mit $|X'| = \max\{n,\beth_k\}$, $|Y'| = \omega$ so, daß $[X']^{2k} \times [Y']^{2l}$ in einer Äquivalenzklasse enthalten ist.

Wir zeigen zunächst, daß für alle $x,x' \in [X']^k$ und alle $y,y' \in [Y']^l$ gilt:

(1) $f(x,y) = f(x,y')$ gdw. $f(x',y) = f(x',y')$,

(2) $f(x,y) = f(x',y)$ gdw. $f(x,y') = f(x',y')$.

Beweis von (1): Wegen $|X'| \geq \beth_k$ gibt es $Z,Z' \subseteq X'$ mit $Z < Z'$, $|Z| \geq 2k$ und $|Z'| \geq k$. Wähle $z \in [Z]^{2k}$, $z = (z_0,\ldots,z_{2k-1})$, und $z' \in [Z']^k$, $z' = (z'_0,\ldots,z'_{k-1})$. Seien $x,x' \in [X']^k$, $y,y' \in [Y']^l$. Es gibt $v \in [X']^{2k}$, $v = (v_0,\ldots,v_{2k-1})$, und $s,s' \in [2k]^k$, $s = (s_0,\ldots,s_{k-1})$, $s' = (s'_0,\ldots,s'_{k-1})$ mit $x = v\restriction s$ und $x' = v\restriction s'$.

Setze $w_i := \begin{cases} z_{s_i}, & i<k \\ z'_{i-k}, & k \leq i < 2k-1 \end{cases}$, $w'_i := \begin{cases} z_{s'_i}, & i<k \\ z'_{i-k}, & k \leq i < 2k-1 \end{cases}$,

$w := (w_0,\ldots,w_{2k-1})$, $w' := (w'_0,\ldots,w'_{2k-1})$. Dann gilt $w,w' \in [X']^{2k}$, und da alle Elemente aus $[X']^{2k} \times [Y']^{2l}$ unter π äquivalent sind, folgt:

$f(v\restriction s,y) \quad f(v\restriction s,y')$

gdw. $f(z\restriction s,y) = f(z\restriction s,y')$

gdw. $f((w_0,\ldots,w_{k-1}),y) = f((w_0,\ldots,w_{k-1}),y')$

gdw. $f((w'_0,\ldots,w'_{k-1}),y) = f((w'_0,\ldots,w'_{k-1}),y')$

gdw. $f(z\restriction s',y) = f(z\restriction s',y')$

gdw. $f(v\restriction s',y) = f(v\restriction s',y')$.

Damit ist (1) bewiesen, und (2) folgt analog. Sei nun

$a := \{i<k \mid$ es gibt $(v_0,\dots,v_k) \in [X']^{k+1}$ und $y \in [Y']^1$ mit $f((v_0,\dots,v_i,v_{i+2},\dots,v_k),y) \neq f((v_0,\dots,v_{i-1},v_{i+1},\dots,v_k),y)\}$,

$b := \{j<l \mid$ es gibt $x \in [X']^k$ und $(w_0,\dots,w_l) \in [Y']^{l+1}$ mit $f(x,(w_0,\dots,w_j,w_{j+2},\dots,w_l)) \neq f(x,(w_0,\dots,w_{j-1},w_{j+1},\dots,w_l))\}$.

Seien $x,x' \in [X']^k$ und $y,y' \in [Y']^l$, $x = (x_0,\dots,x_{k-1})$, $x' = (x'_0,\dots,x'_{k-1})$. Dann gilt:

(3) $x_i = x'_i$ für alle $i \in a \implies f(x,y) = f(x',y)$,

(4) $y_j = y'_j$ für alle $j \in b \implies f(x,y) = f(x,y')$.

Beweis von (3): Setze $z_i := \max\{x_i,x'_i\}$ $(i<k)$. Ist $x_i = x'_i$ für alle $i \in a$, so gilt für alle $i<k$:

$(5)_i$ $f((x_0,\dots,x_i,z_{i+1},\dots,z_{k-1}),y) = f((x'_0,\dots,x'_i,z_{i+1},\dots,z_{k-1}),y)$:

Sei $i<k$ und für $j<i$ die Behauptung bewiesen. Ist $x_i = x'_i$, so $z_i = x_i$ und $z_i = x'_i$; $(5)_i$ folgt daher für $i = 0$ unmittelbar aus $f((z_0,\dots,z_{k-1}),y) = f((z_0,\dots,z_{k-1}),y)$, sowie für $i>0$ aus der Gültigkeit von $(5)_{i-1}$. Wenn $x_i \neq x'_i$, so $i \notin a$. Sei etwa $x_i < x'_i$. Dann ist $z_i = x'_i$, also $x_0 \leq \dots \leq x_i \leq z_{i+1} \leq \dots \leq z_{k-1}$ und wegen $i \notin a$

$$\begin{aligned} f((x_0,\dots,x_i,z_{i+1},\dots,z_{k-1}),y) &= f((x_0,\dots,x_{i-1},z_i,\dots,z_{k-1}),y) \\ &= f((x'_0,\dots,x'_{i-1},z_i,\dots,z_{k-1}),y) \\ &= f((x'_0,\dots,x'_{i-1},x'_i,z_{i+1},\dots,z_{k-1}),y). \end{aligned}$$

Für $i := k-1$ folgt $f(x,y) = f(x',y)$. Damit ist (3) bewiesen, und genauso zeigt man (4). Aus (3) und (4) folgt eine Richtung des Lemmas: Seien $(x_0,\dots,x_{k-1}),(x'_0,\dots,x'_{k-1}) \in [X']^k$ und $(y_0,\dots,y_{l-1}),(y'_0,\dots,y'_{l-1}) \in [Y']^l$, $x_i = x'_i$ für alle $i \in a$ und $y_j = y'_j$ für alle $j \in b$. Dann gilt:

$f((x_0,\dots,x_{k-1}),(y_0,\dots,y_{l-1})) - f((x'_0,\dots,x'_{k-1}),(y_0,\dots,y_{l-1}))$ nach (5)

$= f((x'_0,\dots,x'_{k-1}),(y'_0,\dots,y'_{l-1}))$ nach (4).

Sei nun $f(x,y) = f(x',y')$, $x = (x_0,\dots,x_{k-1})$, $x' = (x'_0,\dots,x'_{k-1})$, $y = (y_0,\dots,y_{l-1})$, $y' = (y'_0,\dots,y'_{l-1})$.

Annahme: $x_i \neq x'_i$ für ein $i\in a$. Wähle $i\in a$ minimal mit dieser Eigenschaft. Für $j<i$ gilt dann $j\notin a$ oder $x_j = x'_j$.

Setze $z_j := \min\{x_j,x'_j\}$ $(j<i)$. Für alle $j<i$ gilt:

$(6)_j$ $f((z_0,\dots,z_j,x_{j+1},\dots,x_{k-1}),y) = f((z_0,\dots,z_j,x'_{j+1},\dots,x'_{k-1}),y')$:

Sei $j<i$ und $(6)_{j'}$ für $j'<j$ bereits gezeigt. Ist $x_j = x'_j$, so folgt die Behauptung wegen $z_j = x_j$ und $z_j = x'_j$ unmittelbar aus $f(x,y) = f(x',y')$ (falls $j = 0$) bzw. aus $(6)_{j-1}$ (falls $j>0$).

Sei also $x_j \neq x'_j$, etwa $x_j < x'_j$. Dann gilt $j\notin a$ und $z_j = x_j$, also

$f((z_0,\dots,z_j,x'_{j+1},\dots,x'_{k-1}),y') - f((z_0,\dots,z_{j-1},x'_j,\dots,x'_{k-1}),y')$

$= f((z_0,\dots,z_{j-1},x_j,\dots,x_{k-1}),y)$

$- f((z_0,\dots,z_{j-1},z_j,x_{j+1},\dots,x_{k-1}),y)$.

Für $j := i-1$ ergibt sich

$f((z_0,\dots,z_{i-1},x_i,\dots,x_{k-1}),y) = f((z_0,\dots,z_{i-1},x'_i,\dots,x'_{k-1}),y')$.

Sei etwa $x_i < x'_i$. Wegen $|X'| \geq 2k+1$ und der Homogenität bzgl. π kann oBdA. angenommen werden, daß es ein $\tilde{x} \in X'$ gibt mit $x_i < \tilde{x} < \min\{x_{i+1},x'_i\}$. Es folgt

$f((z_0,\dots,z_{i-1},\tilde{x},x_{i+1},\dots,x_{k-1}),y)$ $f((z_0,\dots,z_{i-1},x'_i,\dots,x'_{k-1}),y')$

$- f((z_0,\dots,z_{i-1},x_i,\dots,x_{k-1}),y)$,

d.h. für $v := (z_0,\dots,z_{i-1},x_i,\tilde{x},x_{i+1},\dots,x_{k-1}) \in [X']^{k+1}$ gilt $f((v_0,\dots,v_i,v_{i+2},\dots,v_k),y) = f((v_0,\dots,v_{i-1},v_{i+1},\dots,v_k),y)$ im Widerspruch zu $i\in a$.

Also gilt $x_i = x'_i$ für alle $i\in a$, und analog zeigt man $y_j = y'_j$ für alle $j\in b$. □

3.3 Bem.: Der Spezialfall $k = 0$ folgt auch unmittelbar aus [7], Theorem 1 , und findet sich ebenfalls in [10]. Der hier angegebene Beweis verläuft im wesentlichen wie in [10].

Sei $X \subseteq \omega$, $n \in \omega$. Die Menge der streng monoton wachsenden Funktionen $f: n \longrightarrow X$ läßt sich auf kanonische Weise mit $[X]^n$ identifizieren vermöge $f \longmapsto (f(0),\ldots,f(n-1))$.
Für beliebige $X,Y \subseteq \omega$ sei daher von nun an

3.4 Def.: $[X]^Y := \{f \in {}^Y X \mid f \text{ streng monoton wachsend}\}$.
$Q \subseteq {}^Y\omega$ heiße Würfel der Kantenlänge n in ${}^Y\omega$, falls $Q = \bigtimes\{S_i \mid i \in Y\}$ mit $|S_i| = n$ $(i \in Y)$.

Statt "Würfel der Kantenlänge n" wird kurz "n-Würfel" geschrieben.

3.5 Def.: Seien $a \subseteq b \subseteq \omega$, b endlich, $n \in \omega$.
Teilmengen von ${}^b\omega$ von der Form
$Q * [X]^{b \setminus a} := \{f \in {}^b\omega \mid f\restriction a \in Q \text{ und } f\restriction b\setminus a \in [X]^{b\setminus a}\}$,
wo Q ein n-Würfel in ${}^a\omega$ und $X \subseteq \omega$, $|X| = \omega$ ist, heißen n-zulässig vom Typ $\tau := (a,b)$.

Die n-zulässigen Mengen vom Typ (b,b) sind also die n-Würfel in ${}^b\omega$, die n-zulässigen Mengen vom Typ $(0,b)$ haben die Form $[X]^b$ mit $|X| = \omega$.

Bem.: $Q * [X]^{b\setminus a}$ läßt sich auf kanonische Weise mit $Q \times [X]^{b\setminus a}$ identifizieren durch $f \longmapsto (f\restriction a, f\restriction b\setminus a)$.

3.6 Bem.: Seien $a, X \subseteq \omega$, $|X| = n \cdot k$, $|a| = k$. Dann enthält $[X]^a$ einen n-Würfel: wähle $S_i \subseteq X$ mit $|S_i| = n$ $(i \in a)$ und

$S_i < S_j$ für $i,j \in a$ mit $i<j$. Dann ist $\times\{S_i \mid i\in a\} \subseteq [X]^a$.

Sei umgekehrt $Q = \times\{S_i \mid i\in a\}$ ein n-Würfel, $f_i : n \longrightarrow S_i$ bijektiv, $\varphi := \underset{i\in a}{\times} f_i$. Durch φ wird $[n]^a$ in Q eingebettet, und weil φ komponentenweise abbildet, werden dabei m-Würfel in m-Würfel überführt.

Aus 3.6 und der Bemerkung davor folgt, daß analoge Versionen von Lemma 3.1 und 3.2 gelten, in denen die Mengen $[X]^k$, X endlich, durch Würfel ersetzt sind, und daß sich diese Ergebnisse unmittelbar auf zulässige Mengen übertragen. Insbesondere haben wir

3.7 Lemma: Es gibt Funktionen $\Phi_k \in {}^{\omega}\omega$ $(k \in \omega)$ mit

(1) $\Phi_k \leq \Phi_{k'}$ $(k \leq k')$ und

(2) Ist $n \in \omega$, $Z \subseteq {}^{b}\omega$ $\Phi_k(n)$-zulässig vom Typ (a,b), $|a| = k$, $Z = A_0 \cup A_1$, so gibt es ein n-zulässiges Z' vom Typ (a,b) mit $Z' \subseteq A_0$ oder $Z' \subseteq A_1$.

3.8 Lemma: Es gibt Funktionen $\Psi_{k,l} \in {}^{\omega}\omega$ $(k,l \in \omega)$ mit der Eigenschaft:
Ist $n \in \omega$, $Z \subseteq {}^{b}\omega$ $\Psi_{k,l}(n)$-zulässig vom Typ (a,b), $|a| = k$, $|b\setminus a| = l$ und f eine auf Z definierte Funktion, so gibt es ein n-zulässiges $Z' \subseteq Z$ vom Typ (a,b) und ein $c \subseteq b$ so, daß für alle $x,y \in Z'$ gilt: $f(x) = f(y)$ gdw. $x\restriction c = y\restriction c$.

Das nächste Lemma enthält weitere Eigenschaften zulässiger Mengen, die bei den folgenden Ultrafilterkonstruktionen benötigt werden. Zuvor noch eine Definition:

3.9 Def.: Für $a \subseteq b \subseteq \omega$ werde die Projektion
$p_a^b : {}^b\omega \longrightarrow {}^a\omega$ definiert durch $p_a^b(f) := f\restriction a$.

3.10 Lemma: Seien $a \subseteq b \subseteq \omega$, b endlich, $\tau : (a,b)$, $n \in \omega \setminus 1$.
$Z \subseteq {}^b\omega$ sei n-zulässig vom Typ τ . Es gilt:

(1) Ist $c \subseteq b$, so gibt es ein n-zulässiges $T \subseteq p_c^b[Z]$ vom Typ $\tau_c := (a \cap c, c)$.

(2) Ist $c \subseteq b$, $T \subseteq p_c^b[Z]$ n-zulässig vom Typ τ_c, so gibt es ein n-zulässiges $Z' \subseteq Z$ vom Typ τ mit $p_c^b[Z'] \subseteq T$.

(3) Ist $a \not\subseteq b$, so hat Z eine Darstellung der Form
$Z = \bigcup \{A_i \mid i \in \omega\}$ mit den Eigenschaften
(i) A_i endlich $(i \in \omega)$,
(ii) $A_i \cap A_j = 0$ $(i,j \in \omega ; i \neq j)$,
(iii) Ist $I \subseteq \omega$ unendlich, so gibt es ein n-zulässiges Z' vom Typ τ mit $Z' \subseteq \bigcup \{A_i \mid i \in I\}$.

Bew.: Sei $Z = Q * [X]^{b \setminus a}$, $Q = \bigtimes \{S_i \mid i \in a\}$ mit $|S_i| = n$ $(i \in a)$,
$X = \{x_i \mid i \in \omega\}$ mit $x_i < x_j$ für $i < j$.

(1) Sei $c \subseteq b$. Wir betrachten zunächst den Fall $a = 0$, d.h. $Z = [X]^b$. Setze $k := 1 + |b \setminus c|$, $Y := \{x_{i \cdot k} \mid i \in \omega \setminus 1\}$. Dann liegen zwischen je zwei Elementen aus Y genügend viele Elemente aus X, um jede streng monotone Funktion $f : c \longrightarrow Y$ zu einer streng monotonen Funktion $\hat{f} : b \longrightarrow X$ fortsetzen zu können. Also gilt $[Y]^c \subseteq p_c^b[[X]^b]$. Im allgemeinen Fall ist

(*) $p_c^b[Z] = p_{a \cap c}^a[Q] * p_{c \setminus a}^{b \setminus a}[[X]^{b \setminus a}]$.

$p_{a \cap c}^a[Q] = \bigtimes \{S_i \mid i \in a \cap c\}$ ist n-Würfel in ${}^{a \cap c}\omega$, und aus dem obigen Beweis folgt, daß es ein $Y \subseteq X$, $|Y| = \omega$ gibt mit

$[Y]^{c\setminus a} \subset p^{b\setminus a}_{c\setminus a}[[X]^{b\setminus a}]$. Setze $T := (\times\{S_i \mid i\in a\cap c\})*[Y]^{c\setminus a}$.

(2) Sei $T = (\times\{S'_i \mid i\in a\cap c\})*[Y]^{c\setminus a}$, $|S'_i| = n$ $(i\in a\cap c)$, $|Y| = \omega$.

Aus $T \subseteq p^b_c[Z]$ folgt $S'_i \subseteq S_i$, also $S'_i = S_i$ $(i\in a\cap c)$, und $p^{b\setminus a}_{c\setminus a}[[Y]^{b\setminus a}] \subseteq [Y]^{c\setminus a} \subseteq p^{b\setminus a}_{c\setminus a}[[X]^{b\setminus a}]$; also gilt $p^b_c[Q*[Y]^{b\setminus a}] \subseteq T$, und $Q*[Y]^{b\setminus a} \subseteq Z$ ist n-zulässig vom Typ τ.

(3) Sei $a \neq b$, $k := \max(b\setminus a)$. $B_i := \{f \in [X]^{b\setminus a} \mid f(k) = x_i\}$ ist endlich, da es nur endlich viele streng monoton wachsende $f: b\setminus a \longrightarrow X$ gibt mit $f(k) = x_i$. Daher ist auch $A_i := Q*B_i$ endlich $(i\in\omega)$, und es gilt $A_i \cap A_j = 0$ für $i \neq j$ sowie $Z = Q*[X]^{b\setminus a} = Q*(\cup\{B_i \mid i\in\omega\}) = \cup\{A_i \mid i\in\omega\}$. Ist $I\subseteq\omega$, $|I| = \omega$ und $Y := \{x_i \mid i\in I\}$, so ist $Z' := Q*[Y]^{b\setminus a}$ n-zulässig vom Typ τ, und $Z' \subseteq \cup\{A_i \mid i\in I\}$. □

3.11 Lemma: Seien $m,n\in\omega\setminus 1$, $k\leq m$, $Z\subseteq {}^m\omega$ n-zulässig vom Typ (k,m), $a\subseteq b\subseteq m$. Dann gilt:
$(a,b)\in R^m_k$ gdw. p^b_a endlich auf $p^m_b[Z]$.
(Bem.: Def. von R^m_k in 1.16).

Bew.: Sei $Z = (\times\{S_i \mid i<k\})*[X]^{m\setminus k}$, $|S_i| = n$ $(i<k)$, $|X| = \omega$.
"$\Longrightarrow$" Sei $(a,b)\in R^m_k$. Falls $b\subseteq k$, so $p^m_b[Z] = \times\{S_i \mid i\in b\}$ endlich, also p^b_a endlich auf $p^m_b[Z]$. Sei daher $b\setminus k \neq 0$, $l := \max(b\setminus k)$; nach Def. von R^m_k gilt dann $l = \max(b)\in a$. Sei $g\in {}^a\omega$ und $f\in p^m_b[Z]$ mit $p^b_a(f) = f\restriction a = g$. $f\restriction b\cap k$ ist Element der endlichen Menge $\times\{S_i \mid i\in b\cap k\}$, und $f\restriction b\setminus k$ ist streng monoton wachsend mit $f(l) = g(l)$, da $l\in a$. Weil l das Maximum von $b\setminus k$ ist, kann es nur endlich viele solcher Funk-

tionen f geben. Also ist p_a^b endlich auf $p_b^m[Z]$.

"$\Longleftarrow$" Sei $b \not\subseteq k$, d.h. $b \setminus k \neq 0$, und $l := \max(b \setminus k)$. Zu zeigen ist $l \in a$. Annahme: $l \notin a$. Wähle ein $f \in Z$. Es ist $f(l) \in X$; sei $Y \subseteq X$ unendlich mit $f(l) < y$ für alle $y \in Y$. Wähle $f_y \in Z$ mit $f_y(i) = f(i)$ für alle $i < l$ und $f_y(l) = y$. Für $g_y := p_b^m(f_y) \in p_b^m[Z]$ gilt dann wegen $l \in b$ $g_y \neq g_{y'}$ für $y \neq y'$, und wegen $a \subseteq b \setminus \{l\} \subseteq l$ ist $p_a^b(g_y) = f \restriction a = p_a^b(g_{y'})$ für alle $y, y' \in Y$ im Widerspruch dazu, daß p_a^b endlich auf $p_b^m[Z]$ ist. □

3.12 Def.: Sei $m \in \omega \setminus 1$, $k \leq m$ und $h: \omega \times \omega \longrightarrow \omega \setminus 1$ eine Funktion mit den Eigenschaften:

(1) $h(i+1,j) \geq \max\left\{2^{h(i,j)^m}, \Phi_k(h(i,j)), \Psi_{k,m-k}(h(i,j))\right\}$,

(2) $h(i,j+1) > \sum\limits_{n \leq j} h(n,n)^m$

für alle $i,j \in \omega$.

(Die Existenz solcher Funktionen h ist leicht nachzuweisen). Wegen (1) gilt für alle $i,j,n \in \omega$:

(3) $i \leq j \implies h(i,n) \leq h(j,n)$.

3.13 Def.: D sei freier Ultrafilter auf ω, $m \in \omega \setminus 1$, $k \leq m$, $\tau := (k,m)$, h wie in 3.12, $A \subseteq \omega^{\times^m}\omega$.

$A(\tau,n) := \left\{x \in \omega \mid \text{es gibt ein } h(n,x)\text{-zulässiges } Z \text{ vom Typ } \tau \text{ mit } \{x\}^{\times} Z \subseteq A .\right\}$

A heiße groß (vom Typ τ), falls $A(\tau,n) \in D$ für alle $n \in \omega$.

A heiße klein, wenn A nicht groß ist.

3.14 Lemma: Seien $A,B \subseteq \omega \times {}^m\omega$. Es gilt:

(1) A endlich $\Longrightarrow$ A klein.

(2) A groß, $A \subseteq B$ $\Longrightarrow$ B groß.

(3) $A \cup B$ groß $\Longrightarrow$ A groß oder B groß.

Bew.:

(1) und (2) sind trivial.

(3) $A \cup B$ sei groß, $n \in \omega$. Dann ist $(A \cup B)(\tau,n+1) \in D$.

Es gilt $(A \cup B)(\tau,n+1) \subseteq A(\tau,n) \cup B(\tau,n)$:

Sei $x \in (A \cup B)(\tau,n+1)$ und Z sei $h(n+1,x)$-zulässig vom Typ τ mit $\{x\} \times Z \subseteq A \cup B$. Aus $h(n+1,x) \geq \Phi_k(h(n,x))$ folgt wegen Lemma 3.7, daß es ein $h(n,x)$-zulässiges Z vom Typ τ gibt mit $\{x\} \times Z \subseteq A$ oder $\{x\} \times Z \subseteq B$; also $x \in A(\tau,n)$ oder $x \in B(\tau,n)$.

Für jedes $n \in \omega$ ist daher $A(\tau,n) \in D$ oder $B(\tau,n) \in D$; daraus folgt, daß A oder B groß ist. □

3.15 Lemma: $\mathfrak{F}$ sei abzählbare Filterbasis aus großen Mengen.
Dann gibt es $A_0,A_1 \subseteq \omega \times {}^m\omega$ mit: $A_0 \cap A_1 = 0$ und $A_1 \cap B$ groß für alle $B \in \mathfrak{F}$, $1 \in 1$.

Bew.:

Sei $\mathfrak{F} = \{B_i \mid i \in \omega\}$, oBdA. $B_{i+1} \subseteq B_i$ $(i \in \omega)$, und $\langle u_i \mid i \in \omega \rangle$ Folge in D mit $u_{i+1} \subseteq u_i \subseteq B_i(\tau,i+1) \setminus i$ für alle $i \in \omega$.

Für $x \in u_0$ sei $s(x) := \max\{i \in \omega \mid x \in u_i\}$ und Z_x sei $h(s(x)+1,x)$-zulässig vom Typ τ mit $\{x\} \times Z_x \subseteq B_{s(x)}$. Es gibt $h(s(x),x)$-zulässige $Z_{x,0},Z_{x,1} \subseteq Z_x$ vom Typ τ mit $Z_{x,0} \cap Z_{x,1} = 0$:

Ist $k<m$, so $Z_x = Q*[Y]^{m \setminus k}$ mit $Y \subseteq \omega$, $|Y| = \omega$. Wähle $Y_0,Y_1 \subseteq Y$ mit $Y_0 \cap Y_1 = 0$ und $|Y_0| = |Y_1| = \omega$. Dann ist wegen $m \setminus k \neq 0$ ebenfalls $[Y_0]^{m \setminus k} \cap [Y_1]^{m \setminus k} = 0$; sei $Z_{x,1} := Q*[Y_1]^{m \setminus k}$.

Ist $k = m$, so $Z_x = \times\{S_i \mid i<m\}$ mit $|S_i| = h(s(x)+1,x)$; also $|S_i| \geq 2\cdot h(s(x),x)$. Wähle $S_{i,0}, S_{i,1} \subseteq S_i$ mit $S_{i,0} \cap S_{i,1} = 0$ und $|S_{i,1}| = h(s(x),x)$ und setze $Z_{x,l} := \times\{S_{i,l} \mid i<m\}$ $(l \leq 1)$. Die Mengen $A_l := \bigcup\{\{x\}\times Z_{x,l} \mid x\in u_0\}$ $(l \leq 1)$ haben dann die gewünschte Eigenschaft (daß $A_l \cap B_i$ groß ist für alle $i\in\omega$ folgt aus $u_{\max\{i,n\}} \subseteq (A_l \cap B_i)(\tau,n)$ für alle $n,i\in\omega$). □

3.16 Def.: $\overline{p}^b_a := id_\omega \times p^b_a$ $(a\leq b\leq\omega)$.

3.17 Lemma: $\mathcal{D}$ sei abzählbare Filterbasis aus groß[illegible]

f eine auf $\omega\times{}^m\omega$ definierte Funktion.

Dann gibt es $A \subseteq \omega\times{}^m\omega$, $a\leq m$ und eine Funktion g mit den folgenden Eigenschaften:

(1) $A\cap B$ ist groß für alle $B\in\mathcal{D}$,

(2) $f\restriction A = g\circ\overline{p}^m_a\restriction A$,

(3) g injektiv, wenn $a \neq 0$.

Bew.:

Sei $\mathcal{D} = \{B_i \mid i\in\omega\}$, oBdA. $B_{i+1} \subseteq B_i$ $(i\in\omega)$. Weil D frei ist, gibt es eine Folge $\langle u_i \mid i\in\omega\rangle$ in D mit $u_{i+1} \subseteq u_i$ und $u_i \subseteq B_i(\tau,i+2) \setminus i$ für alle $i\in\omega$. Für $x\in u_0$ sei $s(x) := \max\{i\in\omega \mid x\in u_i\}$, Z_x sei $h(s(x)+2,x)$-zulässig vom Typ τ mit $\{x\}\times Z_x \subseteq B_{s(x)}$. Für $a\leq m$ setzen wir

v_a : { $x\in u_0$ | es gibt [illegible] $h(s(x)+1,x)$-[illegible] Z_x vom Typ τ und eine injektive Funktion g mit $f(x,y) = g(x,y\restriction a)$ für alle $y\in Z$ }

Aus Lemma 3.8 folgt $u_0 = \bigcup\{v_a \mid a\leq m\}$ (wegen $\tau = (k,m)$ und $h(s(x)+2,x) \geq \Psi_{k,m-k}(h(s(x)+1,x)))$.

Es gibt also ein $a \subseteq m$ mit $v_a \in D$. Für $x \in v_a$ sei $Z'_x \subseteq Z_x$ $h(s(x)+1,x)$-zulässig vom Typ τ und g_x injektiv mit $f(x,y) = g_x(x, y \restriction a)$ für alle $y \in Z'_x$.

Sei $T_x \subseteq p_a^m[Z'_x]$ $h(s(x)+1,x)$-zulässig vom Typ $\tau_a = (a \cap k, a)$ (Existenz: Lemma 3.10). Zur Definition von A konstruieren wir eine Folge $\langle T'_x \mid x \in v_a \rangle$ mit

(1) $T'_x \subseteq T_x$ ist $h(s(x),x)$-zulässig vom Typ τ_a und, falls $a \neq 0$,

(2) $g_x[\{x\} \times T'_x] \cap g_y[\{y\} \times T'_y] = 0$ für alle $x,y \in v_a$, $x \neq y$.

Wir wählen dann $h(s(x),x)$-zulässige $\tilde{Z}_x \subseteq Z'_x$ mit $p_a^m[\tilde{Z}_x] \subseteq T'_x$ (wieder mit Hilfe von Lemma 3.10), und setzen

$A := \bigcup \{ \{x\} \times \tilde{Z}_x \mid x \in v_a \}$, $g(x,y) := g_x(x,y)$ $(x \in v_a, y \in T'_x)$.

Dann gilt $f(x,y) = g_x(x, y \restriction a) = g(x, y \restriction a) = g(\bar{p}_a^m(x,y))$ für alle $(x,y) \in A$, und für $a \neq 0$ ist g injektiv.

Aus $v_a \cap u_{\max\{i,n\}} \subseteq (A \cap B_n)(\tau,i)$ folgt ferner, daß $A \cap B$ groß ist für alle $B \in \mathfrak{B}$.

Es bleibt noch die Existenz der T'_x $(x \in v_a)$ zu zeigen.

Wir unterscheiden dazu zwei Fälle:

1.Fall: $a \subseteq k$. In diesem Fall ist T_x $(x \in v_a)$ ein $h(s(x)+1,x)$-Würfel in ${}^a\omega$. Für $a = 0$ setze $T'_x := T_x$.

Für $a \neq 0$ wird die Folge $\langle T'_x \mid x \in v_a \rangle$ induktiv definiert: Sei $x \in v_a$ und für $y \in v_a$, $y < x$ sei T'_y definiert; T'_y ist dann $h(s(y),y)$-Würfel in ${}^a\omega$. $M := \bigcup \{ g_y[\{y\} \times T'_y] \mid y \in v_a, y < x \}$; es gilt $|M| < h(s(x),x)$, denn für $y \in v_a$, $y < x$ folgt wegen $s(y) \leq y$ und $|a| \leq k \leq m$: $|T'_y| \leq h(s(y),y)^k \leq h(y,y)^m$, also $|M| \leq \sum_{j<x} h(y,y)^m < h(s(x),x)$.

Sei $Y := \{ y \in T_x \mid g_x(x,y) \in M \}$. Weil g_x injektiv ist, folgt

$|Y| \leq |M| < h(s(x),x)$. Y kann also keinen $h(s(x),x)$-Würfel enthalten (weil $a \neq 0$); aus Lemma 3.7 folgt daher wegen $h(s(x)+1,x) \geq \Phi_{|a|}(h(s(x),x))$, daß $T_x \setminus Y$ einen $h(s(x),x)$-Würfel T'_x enthält; nach Definition von M gilt für $y \in v_a$, $y<x$: $g_x[\{x\}\times T'_x] \cap g_y[\{y\}\times T'_y] = 0$.

2.Fall: $a \setminus k \neq 0$. In diesem Fall hat T_x nach Lemma 3.10 eine Darstellung von der Form

$T_x = \bigcup\{S_{x,i} \mid i \in \omega\}$ mit endlichen, paarweise disjunkten $S_{x,i}$ so, daß für jedes unendliche $I \subseteq \omega$ eine $h(s(x),x)$-zulässige Menge vom Typ τ_a in $\bigcup\{S_{x,i} \mid i \in I\}$ enthalten ist.

Sei $\langle x_i \mid i \in \omega\rangle$ Aufzählung von v_a, in der jedes $x \in v_a$ unendlich oft vorkommt. Wir definieren eine echt aufsteigende Folge $\langle l_i \mid i \in \omega\rangle$ in ω mit:

(*) $g_{x_i}[\{x_i\}\times S_{x_i,l_i}] \cap g_{x_j}[\{x_j\}\times S_{x_j,l_j}] = 0$ $(i \neq j)$.

Sei $l_0 := 0$, $i \in \omega$ und l_j für $j \leq i$ definiert.

$M := \bigcup\{g_{x_j}[\{x_j\}\times S_{x_j,l_j}] \mid j \leq i\}$ ist endlich; weil $g_{x_{i+1}}$ injektiv ist, gibt es ein $l_{i+1} > l_i$ mit:

$M \cap g_{x_{i+1}}[\{x_{i+1}\}\times S_{x_{i+1},l_{i+1}}] = 0$.

Für $x \in v_a$ ist $I_x := \{l_i \mid x_i = x\}$ unendlich; es gibt also ein $h(s(x),x)$-zulässiges $T'_x \subseteq \bigcup\{S_{x,i} \mid i \in I_x\}$ vom Typ τ_a.

Aus (*) folgt $g_x[\{x\}\times T'_x] \cap g_y[\{y\}\times T'_y] = 0$ $(x,y \in v_a,\ x \neq y)$. □

3.18 Lemma: $\mathfrak{Y}$ sei abzählbare Filterbasis aus großen Mengen des Typs $\tau := (m,m)$. Seien $a,b \leq m$, $a \neq 0$, $b \not\leq a$. $f: \omega \times {}^a\omega \longrightarrow \omega \times {}^b\omega$ sei injektiv. Dann gibt es ein $A \subseteq \omega \times {}^m\omega$, $A \cap B$ groß für alle $B \in \mathfrak{Y}$ und $f[\overline{p}^m_a[A]] \cap \overline{p}^m_b[A] = 0$.

Bew.:

Sei $\mathfrak{Y} = \{B_i \mid i \in \omega\}$, oBdA. $B_{i+1} \subseteq B_i$ $(i \in \omega)$ und $u_i \in D$ mit $u_{i+1} \subseteq u_i \subseteq B_i(\tau, i+2) \setminus i$ $(i \in \omega)$. Für $x \in u_0$ seien $s(x) := \max\{i \in \omega \mid x \in u_i\}$ und Q_x ein $h(s(x)+2,x)$-Würfel in ${}^m\omega$ mit $\{x\} \times Q_x \subseteq B_{s(x)}$.

Wir definieren eine Folge $\langle Q'_z \mid z \in u_0 \rangle$ mit den Eigenschaften

(1) $Q'_z \subseteq Q_z$ ist $h(s(x),x)$-Würfel in ${}^m\omega$,

(2) $f[\{x\} \times p^m_a[Q'_x]] \cap (\{y\} \times p^m_b[Q'_y]) = 0$ $(x,y \leq z;\ x,y,z \in u_0)$.

Sei $z \in u_0$ und Q'_x für $x < z$, $x \in u_0$ bereits definiert. Es ist $Q_z = \times\{S_i \mid i \in m\}$ mit $|S_i| = h(s(z)+2,z)$. Für $c \in \{a,b\}$ sei $M_c := \bigcup\{\{x\} \times p^m_c[Q'_x] \mid x \in u_0, x < z\}$; ferner sei $W := \{w \in p^m_a[Q_z] \mid f(z,w) \in M_b\}$.

Für $c \in \{a,b\}$ gilt $|M_c| \leq \sum_{x<z} h(s(x),x)^m < h(s(z),z)$. Wegen der Injektivität von f folgt daraus $|W| < h(s(z),z)$. Da $p^m_a[Q_z]$ ein Würfel in ${}^a\omega$ mit der Kantenlänge $h(s(z)+2,z)$ ist, muß es nach Lemma 3.7 wegen $h(s(z)+2,z) \geq \Phi_{|a|}(h(s(z)+1,z))$ einen $h(s(z)+1,z)$-Würfel $\tilde{Q} := \times\{\tilde{S}_i \mid i \in a\} \subseteq p^m_a[Q_z] \setminus W$ geben (hier wird $a \neq 0$ benötigt). Nach Definition von W gilt dann:

(3) $f[\{z\} \times \tilde{Q}] \cap (\{y\} \times p^m_b[Q'_y]) = 0$ für alle $y \in u_0$, $y < z$.

Um (2) zu erhalten, müssen wir $Q'_z \subseteq Q_z$ so finden, daß gilt: $p^m_a[Q'_z] \subseteq \tilde{Q}$ und

(4) $f\left[\{x\}\times p_a^m[Q'_x]\right] \cap (\{z\}\times p_b^m[Q'_z]) = 0$ für alle $x \leq z$, $x \in u_o$.

Wegen $b \not\subseteq a$ gibt es ein $k \in b \setminus a$. Für $i \in m \setminus \{k\}$ wähle S'_i mit $|S'_i| = h(s(z),z)$ und $S'_i \subseteq \tilde{S}_i$ $(i \in a)$ bzw. $S'_i \subseteq S_i$ $(i \notin a)$. Für $s \in S_k$ sei $T_s := \bigtimes\{T_i \mid i \in b\}$ mit $T_i := S'_i$ $(i \in b \setminus \{k\})$ und $T_k := \{s\}$.

$S := \{s \in S_k \mid f[M_a \cup (\{z\}\times \bigtimes\{S'_i \mid i \in a\})] \cap (\{z\}\times T_s) \neq 0\}$.

Aus $T_s \cap T_{s'} = 0$ für $s \neq s'$ folgt:

$$\begin{aligned} |S| &\leq |f[M_a \cup (\{z\}\times \bigtimes\{S'_i \mid i\in a\})]| \\ &\leq |M_a| + |\bigtimes\{S'_i \mid i\in a\}| \\ &\leq h(s(z),z) + h(s(z),z)^{|a|} \\ &\leq 2\cdot h(s(z),z)^m \\ &\leq h(s(z)+1,z). \end{aligned}$$

Aus $|S_k| = h(s(z)+2,z)$ folgt $|S_k \setminus S| \geq h(s(z)+1,z) \geq h(s(z),z)$.

Wähle $S'_k \subseteq S_k \setminus S$ mit $|S'_k| = h(s(z),z)$ und setze $Q'_z := \bigtimes\{S'_i \mid i \in m\}$.

Dann ist $Q'_z \subseteq Q_z$ ein $h(s(z),z)$-Würfel, $p_a^m[Q'_z] = \bigtimes\{S'_i \mid i\in a\} \subseteq \tilde{Q}$, und (4) folgt aus $p_b^m[Q'_z] = \bigcup\{T_s \mid s \in S'_k\}$.

Gültigkeit von (2):

1.Fall: $y < z$. Für $x < z$ folgt (2) aus der Induktionsannahme,

für $x = z$ aus $p_a^m[Q'_z] \subseteq \tilde{Q}$ und (3).

2.Fall: $y = z$, $x \leq z$. Hier folgt (2) aus (4).

Setze nun $A := \bigcup\{\{z\}\times Q'_z \mid z \in u_o\}$. Aus (1) folgt $u_{\max\{i,j\}} \subseteq (A \cap B_i)(\tau,j)$ für alle $i,j \in \omega$, also $A \cap B_i$ groß für alle $i \in \omega$. Aus (2) folgt $f\left[\bar{p}_a^m[A]\right] \cap \bar{p}_b^m[A] = 0$. □

Damit sind alle Eigenschaften großer Mengen hergeleitet, die wir für die Konstruktion der gesuchten Ultrafilter benötigen.

3.19 Lemma: Es gelte CH. Sei D ein freier Ultrafilter auf ω, $m \in \omega \setminus 1$, $k \leq m$.

Dann gibt es Funktionen $p_a \in {}^{\omega}\omega \ (a \subseteq m)$ und 2^c Ultrafilter E auf ω mit den Eigenschaften:

(1) $p_0(E) = D$, $p_m(E) = E$,

(2) Für alle $a,b \subseteq m$ gilt:

$a \subseteq b$ gdw. Es gibt ein $A \in E$ und eine Funktion g mit

$$p_a \restriction A = g \circ p_b \restriction A .$$

(3) Für alle $a,b \subseteq m$ gilt:

$(a,b) \in R_k^m$ gdw. Es gibt ein $A \in E$ und eine endliche Funktion g mit $p_a \restriction A = g \circ p_b \restriction A$.

(4) Zu jedem $f \in {}^{\omega}\omega$ gibt es $A \in E$, $a \subseteq m$ und $g \in {}^{\omega}\omega$ mit $f \restriction A = g \circ p_a \restriction A$, wobei für $a \neq 0$ g injektiv ist.

Zusatz: Im Fall $k = m$ läßt sich (2) verschärfen zu

(2') Für alle $a,b \subseteq m$ gilt: $a \subseteq b$ gdw. $p_a(E) \leq p_b(E)$.

Bew.:

Sei $\tau := (k,m)$ und Z_x für jedes $x \in \omega$ eine $h(x,x)$-zulässige Menge vom Typ τ. $A := \bigcup \{\{x\} \times Z_x \mid x \in \omega\}$ ist groß vom Typ τ. Sei $\langle f_\alpha \mid \alpha < c \rangle$ Aufzählung aller Funktionen von $\omega \times {}^{a}\omega$ nach $\omega \times {}^{b}\omega$ $(a,b \subseteq m)$. Für $\varphi : c \longrightarrow 2$, $\alpha < c$ werden Filterbasen $\mathcal{B}_\alpha^\varphi$ auf $\omega \times {}^{m}\omega$ definiert mit den Eigenschaften:

(i) $\mathcal{B}_\alpha^\varphi$ ist höchstens abzählbar, besteht nur aus großen Mengen vom Typ τ und $A \in \mathcal{B}_\alpha^\varphi$.

(ii) Ist $Vb(f_\alpha) = \omega \times {}^{m}\omega$, so gibt es $B \in \mathcal{B}_{\alpha+1}^\varphi$, $a \subseteq m$ und eine Funktion g mit $f_\alpha \restriction B = g \circ p_a^m \restriction B$, g injektiv für $a \neq 0$.

(iii) $\mathcal{B}_\alpha^\varphi \subseteq \mathcal{B}_\beta^\varphi$ für $\alpha \leq \beta < c$.

(iv) Ist α minimal mit $\varphi(\alpha) \neq \psi(\alpha)$, so gilt $\mathcal{B}_\alpha^\varphi = \mathcal{B}_\alpha^\psi$, und es

gibt $A_\varphi \in \mathcal{L}^\varphi_{\alpha+1}$, $A_\psi \in \mathcal{L}^\psi_{\alpha+1}$ mit $A_\varphi \cap A_\psi = 0$.

Außerdem, falls $k = m$:

(v) Ist $f_\alpha : \omega \times {}^a\omega \longrightarrow \omega \times {}^b\omega$ injektiv, $a \neq 0$, $b \not\subseteq a$, so gibt es ein $B \in \mathcal{L}^\varphi_{\alpha+1}$ mit $f_\alpha[\bar{p}^m_a[B]] \cap \bar{p}^m_b[B] = 0$.

Konstruktion:

$\mathcal{L}^\varphi_0 := \{A\}$. Sei α Limeszahl und $\mathcal{L}^\varphi_\beta$ $(\beta < \alpha)$ bereits definiert, $\mathcal{L}^\varphi_\alpha := \bigcup \{\mathcal{L}^\varphi_\beta \mid \beta < \alpha\}$. Wegen CH und $\alpha < c$ ist α höchstens abzählbar; also ist $\mathcal{L}^\varphi_\alpha$ höchstens abzählbar und besteht nur aus großen Mengen des Typs τ, da dies für alle $\mathcal{L}^\varphi_\beta$ nach Induktionsvoraussetzung der Fall ist. Falls $\alpha = \beta + 1$ und $\mathcal{L}^\varphi_\beta$ bereits definiert ist, erhalten wir $\mathcal{L}^\varphi_\alpha$ wie folgt:
Nach Voraussetzung ist $\mathcal{L}^\varphi_\beta$ höchstens abzählbare Filterbasis aus großen Mengen des Typs τ. Wegen Lemma 3.15 gibt es $A_0, A_1 \subseteq \omega \times {}^m\omega$ mit $A_0 \cap A_1 = 0$ und $A_i \cap B$ groß vom Typ τ für alle $B \in \mathcal{L}^\varphi_\beta$ $(i \neq 1)$. Damit (iv) gilt, seien A_0, A_1 kanonisch (d.h. unabhängig von φ) gewählt, etwa wie bei Blass [1], Theorem 2. $\mathcal{L}$ sei die von $\mathcal{L}^\varphi_\beta$ und $A_{\varphi(\beta)}$ erzeugte Filterbasis; $\mathcal{L}$ ist höchstens abzählbar und besteht nur aus großen Mengen des Typs τ. Falls $Vb(f_\beta) = \omega \times {}^m\omega$, wähle B zu $\mathcal{L}$ und f_β gemäß Lemma 3.17. Falls $k = m$ und $f_\beta : \omega \times {}^a\omega \longrightarrow \omega \times {}^b\omega$ injektiv, $a \neq 0$ und $b \not\subseteq a$, wähle B zu $\mathcal{L}$ und f_β gemäß Lemma 3.18. Sonst sei $B := \omega \times {}^m\omega$.
$\mathcal{L}^\varphi_\alpha$ sei die von $\mathcal{L}$ und B erzeugte Filterbasis.
Damit ist die Konstruktion der $\mathcal{L}^\varphi_\alpha$ $(\alpha < c , \varphi : c \longrightarrow 2)$ abgeschlossen.

Sei $\mathcal{L}_0$ der Filter, der aus den Komplementen der kleinen Mengen besteht (Lemma 3.14). Dann hat $\mathcal{L}^\varphi := \mathcal{L}_0 \cup \bigcup \{\mathcal{L}^\varphi_\alpha \mid \alpha < c\}$ wegen (i) und (iii) die endliche Durchschnittseigenschaft,

läßt sich also zu einem Ultrafilter F^φ erweitern; F^φ enthält nur große Mengen. Für $\varphi \neq \psi$ ist $F^\varphi \neq F^\psi$ nach (iv).

Es gilt:

(I) $\bar{p}^m_o(F^\varphi) = D \times \{0\}$: Es genügt, eine Inklusion zu zeigen. Sei $v \in \bar{p}^m_o(F^\varphi)$, $v = u \times \{0\}$. $B := (\bar{p}^m_o)^{-1}[v]$ ist Element von F^φ, also groß. Daher gilt $B(\tau,0) \in D$, und wegen $B(\tau,0) \subseteq u$ ist $v = u \times \{0\} \in D \times \{0\}$.

(II) $a \subseteq b$ gdw. Es gibt ein $B \in F^\varphi$ und eine Funktion g mit

$$\bar{p}^m_a \restriction B = g \circ \bar{p}^m_b \restriction B :$$

"$\Longrightarrow$" folgt aus $\bar{p}^m_a = \bar{p}^b_a \circ \bar{p}^m_b$ für $a \subseteq b \subseteq m$.

"$\Longleftarrow$" Sei $\bar{p}^m_a \restriction B = g \circ \bar{p}^m_b \restriction B$, $B \in F^\varphi$. Zu zeigen: $a \subseteq b$.

Angenommen, es gibt ein $i \in a \setminus b$. Weil F^φ nur große Mengen enthält, ist B groß. Es gibt daher $x \in \omega$ und $y,z \in {}^m\omega$ mit: $y \neq z$, $(x,y),(x,z) \in B$ und $y(j) = z(j)$ für alle $j \neq i$; wegen $y \neq z$ somit $y(i) \neq z(i)$. Aus $i \notin b$ folgt $p^m_b(y) = p^m_b(z)$, aus $i \in a$ folgt $p^m_a(y) \neq p^m_a(z)$. Daher:

$\bar{p}^m_a(x,y) \neq \bar{p}^m_a(x,z)$, aber $\bar{p}^m_b(x,y) = \bar{p}^m_b(x,z)$,

Widerspruch! Also gilt $a \subseteq b$.

(III) $(a,b) \in R^m_k$ gdw. Es gibt ein $B \in F^\varphi$ und eine endliche Funktion g mit $\bar{p}^m_a \restriction B = g \circ \bar{p}^m_b \restriction B$:

"$\Longrightarrow$" Sei $(a,b) \in R^m_k$. Dann ist $a \subseteq b$ und $\bar{p}^m_a = \bar{p}^b_a \circ \bar{p}^m_b$; es genügt daher zu zeigen, daß $\bar{p}^b_a$ endlich ist auf $\bar{p}^m_b[A]$, d.h. nach Definition von A, daß p^b_a für alle $x \in \omega$ endlich ist auf $p^m_b[Z_x]$; dies folgt aus 3.11.

"$\Longleftarrow$" Sei $B \in F^\varphi$, g eine endliche Funktion mit $\bar{p}^m_a \restriction B = g \circ \bar{p}^m_b \restriction B$. Aus (II) folgt $a \subseteq b$, also $g \circ \bar{p}^m_b \restriction B = \bar{p}^m_a \restriction B = \bar{p}^b_a \circ \bar{p}^m_b \restriction B$. Daher ist $\bar{p}^b_a$ endlich auf $\bar{p}^m_b[B]$.

B ist groß vom Typ $\tau = (k,m)$; wähle $x \in \omega$, $n \in \omega \setminus 1$ und ein n-zulässiges Z vom Typ τ mit $\{x\} \times Z \subseteq B$. Dann ist p_a^b endlich auf $p_b^m[Z]$, also nach 3.11 $(a,b) \in R_k^m$.

(IV) Ist $Vb(f_\alpha) = \omega \times^m \omega$, so gibt es $B \in F^\varphi$, $a \subseteq m$ und eine Funktion g mit $f_\alpha \restriction B = g \circ \bar{p}_a^m \restriction B$, wobei g für $a \neq 0$ injektiv ist: folgt unmittelbar aus (ii).

Für $k = m$ gilt außerdem:

(II') $a \subseteq b$ gdw. $\bar{p}_a^m(F^\varphi) \trianglelefteq \bar{p}_b^m(F^\varphi)$:

"$\Longrightarrow$" folgt aus (II).

"$\Longleftarrow$" Sei $\bar{p}_a^m(F^\varphi) = f(\bar{p}_b^m(F^\varphi))$ für ein $f: \omega \times^b \omega \longrightarrow \omega \times^a \omega$.

Es ist $f \circ p_b^m = f_\alpha$ für ein $\alpha < c$. Nach (IV) gibt es $B \in F^\varphi$, $c \subseteq m$ und eine Funktion g mit $f \circ \bar{p}_b^m \restriction B = g \circ \bar{p}_c^m \restriction B$, wo g im Fall $c \neq 0$ injektiv ist; $g = f_\beta$ für ein $\beta < c$.

1.Fall: $c = 0$: Dann ist $\bar{p}_a^m(F^\varphi) \trianglelefteq \bar{p}_o^m(F^\varphi)$, also

$$\bar{p}_a^m(F^\varphi) \simeq \bar{p}_o^m(F^\varphi) = \bar{p}_o^a(\bar{p}_a^m(F^\varphi)) .$$

Daraus folgt, daß $\bar{p}_o^a$ injektiv ist auf einem $C \in \bar{p}_a^m(F^\varphi)$; deshalb muß $a = 0$ gelten und somit $a \subseteq b$.

2.Fall: $c \neq 0$: Dann ist g injektiv; aus $f \circ \bar{p}_b^m \restriction B = g \circ \bar{p}_c^m \restriction B$ folgt $g^{-1} \circ f \circ \bar{p}_b^m \restriction B = \bar{p}_c^m \restriction B$, nach (II) also $c \subseteq b$.

Wäre $a \not\subseteq c$, so gäbe es nach (v) ein $B' \in F^\varphi$ mit $g[\bar{p}_c^m[B']] \cap \bar{p}_a^m[B'] = 0$ im Widerspruch dazu, daß $g(\bar{p}_c^m(F^\varphi)) = f(\bar{p}_b^m(F^\varphi)) = \bar{p}_a^m(F^\varphi)$. Somit gilt $a \subseteq c \subseteq b$.

Mittels Bijektionen kann nun die gegebene Situation so auf ω übertragen werden, daß (1) bis (4) bzw. (2') gelten. □

3.20 Satz: Es gelte CH. $\mathfrak{A}$ sei einfach erzeugtes Nichtstandardmodell von $Th(\mathfrak{N})$, $m \in \omega \setminus 1$, $k \leq m$.
Dann gibt es 2^c (paarweise nichtisomorphe) Erweiterungen $(\mathfrak{B}, \varphi)$ von $\mathfrak{A}$ mit
$(C(\mathfrak{A},\mathfrak{B},\varphi), \subseteq, \subseteq_e) \cong (P(m), \subseteq, R_k^m)$.

Bew.:
Sei oBdA. $\mathfrak{A} = \mathfrak{N}^\omega/D$, D freier Ultrafilter auf ω.
Wähle die Funktionen $p_a \in {}^\omega\omega$ $(a \subseteq m)$ und Ultrafilter E auf ω gemäß Lemma 3.19 und setze $\mathfrak{B} := \mathfrak{N}^\omega/E$, $\varphi := p_o^*$.
Wegen $p_o(E) = D$ ist $\varphi: \mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{B}$ elementare Einbettung, also $(\mathfrak{B}, \varphi)$ Erweiterung von $\mathfrak{A}$.
Wir zeigen: $(C(\mathfrak{A},\mathfrak{B},\varphi), \subseteq, \subseteq_e) \cong (P(m), \subseteq, R_k^m)$.

$\mathfrak{A}$ wird erzeugt von $e := id_\omega/D$, $\mathfrak{B}$ von $\tilde{e} := id_\omega/E$, und es gilt $\varphi(e) = p_o^{\mathfrak{B}}(\tilde{e})$. Die Isomorphie wird geliefert durch $H: P(m) \longrightarrow Con(\mathfrak{B})$, definiert durch $H(a) := con(p_a^{\mathfrak{B}}(\tilde{e}))$.

1) $Nb(H) \subseteq C(\mathfrak{A},\mathfrak{B},\varphi)$: $H(0) \in C(\mathfrak{A},\mathfrak{B},\varphi)$, weil $p_o^{\mathfrak{B}}(\tilde{e}) = \varphi(e)$.
Für $a \subseteq m$ folgt aus 3.19,(2) $H(0) \subseteq H(a)$ und deshalb $H(a) \in C(\mathfrak{A},\mathfrak{B},\varphi)$.

2) $C(\mathfrak{A},\mathfrak{B},\varphi) \subseteq Nb(H)$: Wegen $\varphi(e) = p_o^{\mathfrak{B}}(\tilde{e})$ ist $con(\varphi(e)) = H(0)$.
Es bleibt zu zeigen: ist $x \in \mathfrak{B} \setminus \varphi[\mathfrak{A}]$, so gibt es ein $a \subseteq m$ mit $con(x) = H(a)$. Weil $\mathfrak{B}$ von $\tilde{e}$ erzeugt wird, gibt es ein $f \in {}^\omega\omega$ mit $x = f^{\mathfrak{B}}(\tilde{e})$. Nach (4) aus 3.19 gibt es $a \subseteq m$ und $g \in {}^\omega\omega$ mit $x = f^{\mathfrak{B}}(\tilde{e}) = g^{\mathfrak{B}}(p_a^{\mathfrak{B}}(\tilde{e}))$, wo g injektiv ist, falls $a \neq 0$. Wegen $x \notin \varphi[\mathfrak{A}]$ ist $a \neq 0$, denn sonst wäre $x = g^{\mathfrak{B}}(\varphi(e)) = \varphi(g^{\mathfrak{A}}(e))$; Widerspruch! Also ist g injektiv.
Daraus folgt $con(x) = con(p_a^{\mathfrak{B}}(\tilde{e})) = H(a)$.

3) Für alle $a,b \subseteq m$: $a \subseteq b$ gdw. $H(a) \subseteq H(b)$
folgt aus 3.19,(2).

4) Für alle $a,b \subseteq m$: $(a,b) \in R_k^m$ gdw. $H(a) \subseteq_e H(b)$
folgt aus 3.19,(3). □

3.21 Satz: Es gelte CH. D sei freier Ultrafilter auf ω.
$\mathbb{B}$ sei endliche Boolesche Algebra.
Dann gibt es 2^c Ultrafilter $E \supseteq D$ auf ω mit:

(i) $[D,E] \cong \mathbb{B}$,

(ii) $F \leq E \implies F \in [D,E]$ oder $F \leq D$,

(iii) $F \in [D,E] \implies F$ liegt endlich unter E .

Bew.:
OBdA. sei $\mathbb{B} = P(m)$, $m \in \omega \setminus 1$. Wähle E gemäß 3.19 für $k = m$;
dann ist $H: \mathbb{B} \longrightarrow [D,E]$, definiert durch $H(a) := p_a(E)$,
ein Isomorphismus: $a \subseteq b$ gdw. $H(a) \leq H(b)$ gilt wegen (2')
aus 3.19; die Surjektivität von H und Bedingung (ii) folgen
aus 3.19, (4) und (1); (iii) folgt aus 3.19, (3). □

Bem.: Ist D ein P-Punkt, so sind im Fall $k = m$ die in 3.21
konstruierten Ultrafilter E ebenfalls P-Punkte:
Es ist zu zeigen, daß jedes $f \in {}^{\omega}\omega$ auf einem $A \in E$ endlich
oder konstant ist. Aus 3.19,(4) folgt die Existenz von
$A \in E$, $a \subseteq m$ und $g \in {}^{\omega}\omega$ mit $f \restriction A = g \circ p_a \restriction A$ und: g injektiv oder
$a = 0$. Wegen $k = m$ kann oBdA. angenommen werden, daß p_a
auf A endlich ist.

1.Fall: g injektiv. Dann ist $g \circ p_a$ auf A endlich, also auch
f auf A endlich.

[illegible]

[illegible]

[illegible]

Literaturverzeichnis

[1] A. Blass
"The Rudin-Keisler ordering of P-points"
Trans. AMS 179 (1973), 145 - 166

[2] A. Blass
"The intersection of nonstandard models of arithmetic"
J. of Symb. Logic 37 (1972), 103 - 106

[3] C.C. Chang und H.J. Keisler
"Model Theory" North Holland 1973

[4] G. Cherlin und J. Hirschfeld
"Ultrafilters and ultraproducts in non-standard analysis" Contributions to Non-Standard Analysis, ed. W.A.J. Luxemburg und A. Robinson, North Holl. 1972

[5] G. Choquet
"Construction d' ultrafiltres sur N"
Bull. Sci. Math. (2) 92 (1968), 41 - 48

[6] G. Choquet
"Deux classes remarquables d'ultrafiltres sur N"
Bull. Sci. Math. (2) 92 (1968), 143 - 153

[7] P. Erdös und R. Rado
"A combinatorial theorem"
J. London Math. Soc. 25 (1950), 249 - 255

[8] H. Gaifman
"Models and types of Peano's arithmetic"
Ann. of Math. Logic 9 (1976), 223 - 306

[9] J.D. Monk
"Introduction to Set Theory" Mc Graw-Hill 1969

[10] J.B. Paris
"On Models of Arithmetic"
Conference in Math. Logic 1970 (Springer-Verlag Lecture Notes, 1972), 252 - 280

[11] K. Potthoff
"More on the Rudin-Keisler order of P-points"
erscheint demnächst

[12] Ch. Puritz
"Ultrafilters and Standard Functions in Non-Standard Arithmetic"
Proc. London Math. Soc. (3), 22 (1971), 705 - 733

[13] Ch. Puritz
"Skies, Constellations and Monads"
Contributions to Non-Standard Analysis, ed. W.A.J. Luxemburg und A.Robinson, North Holland 1972

[14] M.E. Rudin
"Partial orders on the types in βN"
Trans. AMS 155 (1971), 353 - 362

[15] W. Rudin
"Homogeneity problems in the theory of Čech compactifications"
Duke Math. J. 23 (1956), 409 - 419

Lebenslauf

Am 14.12.1945 wurde ich als Sohn des Zahntechnikermeisters Karl-Heinz Eck und seiner Ehefrau Charlotte, geb. Kleemeier, in Vlotho/Weser geboren.

Von 1952 bis 1956 besuchte ich die Grundschule und anschließend das Neusprachliche Gymnasium in Vlotho, wo ich im Februar 1965 die Reifeprüfung bestand.

Im Sommersemester 1965 begann ich an der Freien Universität Berlin Mathematik und Physik zu studieren. Ich legte dort im Juli 1967 die Diplomvorprüfung und im Oktober 1970 die Diplomhauptprüfung im Fach Mathematik ab.

Von Januar 1969 bis Februar 1971 war ich am II. Mathematischen Institut der Freien Universität Berlin als studentische Hilfskraft, von Februar 1971 bis März 1976 als Wissenschaftlicher Assistent beschäftigt.